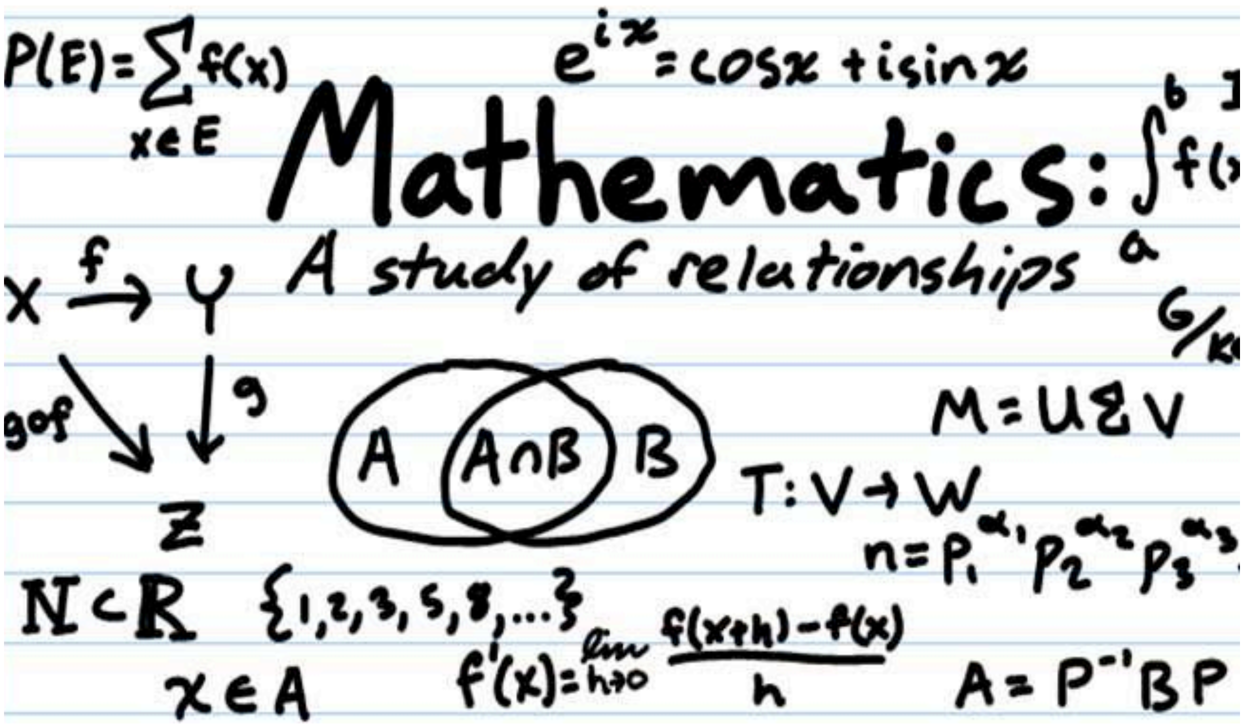
DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

Esercizi di ripasso



Esponenziali

Equazioni esponenziali

$$\frac{3^{1-x}\cdot 9^{2+x}}{27^{x}}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{3^{1-x}\cdot 3^{4+2x}}{3^{3x}}=3^{-1}$$

$$3^{5+x-3x}=3^{-1}$$

$$5-2x=-1$$

$$-2x=-6$$

$$x=3$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{27}{8}\right)^{1-2x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3-6x}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{6x-3}$$

$$x+1=6x-3$$

$$-5x=-4$$

$$x=\frac{4}{5}$$

$$\frac{9^{x+1}}{27^{3-2x}} = \frac{1}{81} \cdot 3^{1+x}$$

$$\frac{3^{2x+2}}{3^{9-6x}} = \frac{3^{1+x}}{3^{4}}$$

$$3^{8x-7} = 3^{x-3}$$

$$8x-7 = x-3$$

$$7x = 4$$

$$x = \frac{4}{7}$$

$$\frac{\left(3^{x+1}\right)^{2x-1} \cdot 27^{1-x}}{9^{2-x}} = 1$$

$$\frac{3^{2x^2+x-1} \cdot 3^{3-3x}}{3^{4-2x}} = 3^{0}$$

$$3^{2x^2-2x+2-4+2x} = 3^{0}$$

$$2x^2-2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$3^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$$

$$15^{x-2} = 15^{0}$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^{x} = 351$$

$$9 \cdot 3^{x} + 3 \cdot 3^{x} + 3^{x} = 351$$

$$13 \cdot 3^{x} = 351$$

$$3^{x} = \frac{351}{13}$$

$$3^{x} = 27 \rightarrow 3^{x} = 3^{3} \rightarrow x = 3$$

$$3 \cdot 2^{x} + 2^{x+3} - 2^{x-1} - 5 \cdot 2^{x+1} = \sqrt{2}$$

$$2^{x}\left(3 + 8 - \frac{1}{2} - 10\right) = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x} \cdot \frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^{x} = 2^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$3^{2x}-3^{x}-6=0$

$t=3^{x}$

$t^{2}-t-6=0 \qquad t_{1,2}=\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases} -2 \\ 3 \end{cases}$

$3^{x}=-2$ impossibile

$3^{x}=3 \rightarrow x=1$

$9^{x}+6\cdot 3^{x}-27=0$

$t=3^{x} \qquad t^{2}=(3^{x})^{2}=3^{2x}=9^{x}$

$t^{2}+6t-27=0 \qquad t_{1,2}=-3\pm 6=\begin{cases} -9 \\ +3 \end{cases}$

$3^{x}=-9$ impossibile

$3^{x}=3 \rightarrow x=1$

$2^{2x}+2^{x+1}-8=0$

$2^{2x}+2\cdot 2^{x}-8=0$

$t=2^{x} \rightarrow t^{2}+2t-8=0 \rightarrow t_{1,2}=-1\pm 3=\begin{cases} -4 \\ +2 \end{cases}$

$2^{x}=-4$ impossibile

$2^{x}=2 \rightarrow x=1$

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$t = 2^x$$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$t_{1,2} = -1 \pm 5 = \begin{cases} - & -6 \\ + & +4 \end{cases}$$

$t = -6 \rightarrow 2^x = -6$ impossibile

$t = 4 \rightarrow 2^x = 2^2 \rightarrow x = 2$

$$9^{x+1} = \frac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{2}$$

$$9 \cdot 3^{2x} = \frac{9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x}{2} \qquad 3^x = t$$

$$18t^2 = 6t$$

$$3t^2 - t = 0$$

$t_1 = 0 \rightarrow 3^x = 0$ impossibile

$t_2 = \frac{1}{3} \rightarrow 3^x = 3^{-1} \rightarrow x = -1$

$$2 \cdot 3^x - 9^x = 1 \qquad t = 3^x$$

$$-t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0$$

$$t = 1 \rightarrow 3^x = 3^0 \rightarrow x = 0$$

$$\frac{2^{2x}}{1+2^x} = 1 - \frac{2^x}{2^x+1} \qquad t = 2^x$$

$$\frac{t^2}{1+t} = 1 - \frac{t}{t+1}$$

$$t^2 = t + 1 - t$$

$$t^2 = 1 \qquad t = \begin{cases} +1 & 2^x = 1 \rightarrow x = 0 \\ -1 & 2^x = -1 \text{ impossibile} \end{cases}$$

$$\left(4^{x-1}\right)^{x+1} = 8^{x^2-2}$$

$$4^{x^2-1} = 8^{x^2-2}$$

$$2^{2x^2-2} = 2^{3x^2-6}$$

$$2x^2-2 = 3x^2-6$$

$$-x^2+4=0$$

$$x=\pm 2$$

$$2^{3x+1} - 7\cdot 4^x + 7\cdot 2^x - 2 = 0 \qquad t=2^x$$

$$2t^3-7t^2+7t-2=0$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & -7 & 7 & -2 \\ +1 & & +2 & -5 & 2 \\ \hline & 2 & -5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$(t-1)(2t^2-5t+2)=0$$

$$t_1=1 \qquad t_{2,3} = \frac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} - & \frac{1}{2} \\ + & 2 \end{cases}$$

$$2^x=1 \to x=0$$

$$2^x=\frac{1}{2} \to x=-1$$

$$2^x=2 \to x=1$$

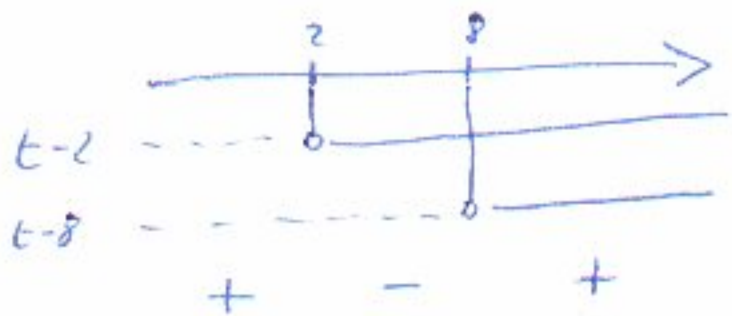
Disequazioni esponenziali

$$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$$

$$t = 2^x$$

$$t^2 - 10t + 16 \geq 0$$

$$(t-2)(t-8) \geq 0$$



$$t \leq 2 \quad \vee \quad t \geq 8$$

$$2^x \leq 2 \quad \vee \quad 2^x \geq 2^3$$

$$x \leq 1 \quad \vee \quad x \geq 3$$

$$2^{x+2} + 2^x - 20 \geq 0$$

$$4 \cdot 2^x + 2^x \geq 20$$

$$5 \cdot 2^x \geq 20$$

$$2^x \geq 4$$

$$2^x \geq 2^2$$

$$x \geq 2$$

$$2^x + 2^{4-x} > 17$$

$$2^x + \frac{16}{2^x} > 17 \qquad 2^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2^{2x} + 16 - 17 \cdot 2^x > 0 \qquad t = 2^x$$

$$t^2 - 17t + 16 > 0$$

$$(t-1)(t-16) > 0$$

$$t < 1 \quad \vee \quad t > 16$$

$$2^x < 2^0 \quad \vee \quad 2^x > 2^4$$

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 4$$

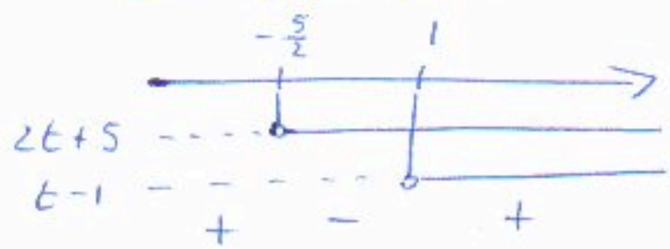
$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{3}{5} > \frac{2}{5^{1-x}}$$

$$\frac{1}{5^x} - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}\cdot 5^x > 0 \qquad t = 5^x$$

$$-\frac{2}{5}5^{2x} - \frac{3}{5}\cdot 5^x + 1 > 0$$

$$2t^2 + 3t - 5 < 0$$

$$(2t+5)(t-1) < 0$$



$$-\frac{5}{2} < t < 1$$

$$-\frac{5}{2} < 5^x < 1$$

$$5^x < 1$$

$$5^x < 5^0 \rightarrow x < 0$$

$$\frac{1}{4}\cdot 2^{x} > 5^{x-2}$$

$$2^{-2}\cdot 2^{x} > 5^{x-2}$$

$$2^{x-2} > 5^{x-2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} > 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x-2} > \left(\frac{2}{5}\right)^{0} \rightarrow x-2<0 \rightarrow x<2$$

$$\frac{1}{3}\cdot 9^{x} > \frac{16^{x}}{4}$$

$$\left(\frac{9}{16}\right)^{x} > \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} > \frac{3}{4} \qquad 2x<1 \rightarrow x<\frac{1}{2}$$

$$5^x < 4^{x-1} \cdot 5$$

$$5^{x-1} < 4^{x-1}$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} < \left(\frac{5}{4}\right)^0$$

$$x-1<0$$

$$x<1$$

$$\frac{27}{8} \cdot 2^x < 3^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$x>3$$

$$\frac{1+2^x}{1-2^x} \leq 1$$

$$\frac{1+2^x}{1-2^x} - 1 \leq 0$$

$$\frac{1+2^x-1+2^x}{1-2^x} \leq 0$$

$$\frac{2 \cdot 2^x}{1-2^x} \leq 0$$

$$\frac{2^x}{2^x-1} \geq 0$$

$N>0$

$2^x>0$

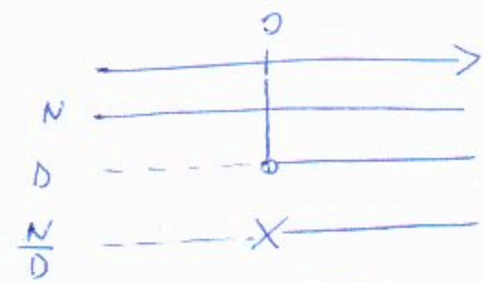
$\forall x \in \mathbb{R}$

$D>0$

$2^x-1>0$

$2^x>2^0$

$x>0$



$$\boxed{x>0}$$

$$\frac{1-3^x}{4^x+2^x-2}<0$$

$$\frac{3^x-1}{2^{2x}+2^x-2}>0$$

N: $3^x-1>0$

$3^x>3^0$

$x>0$

D: $t=2^x$

$t^2+t-2>0$

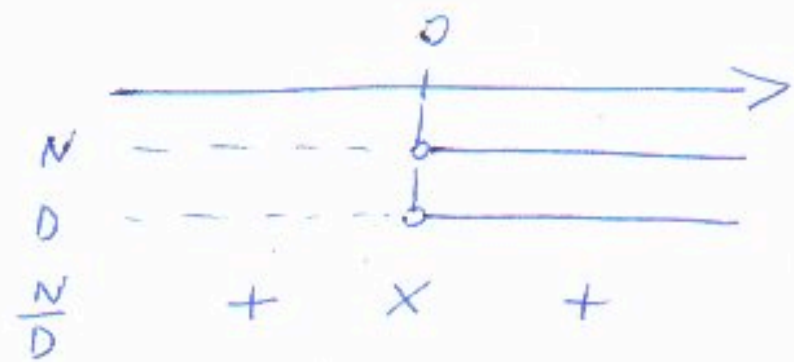
$(t+2)(t-1)>0$

$t<-2 \lor t>1$

$t>1$

$2^x>2^0$

$x>0$



S: $\forall x \neq 0$

$$3^{4x}-3^{3x}-7\cdot 3^{2x}+3^{x}+6<0$$

$$t=3^{x}$$

$$t^4-t^3-7t^2+t+6<0$$

$$\begin{array}{c|cccc|c}
 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -7 & -6 & 0
\end{array}$$

$$(t-1)\left(t^3-7t-6\right)<0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & 0 & -7 & -6 \\
-1 & & -1 & 1 & 6 \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & 0
\end{array}$$

$$(t-1)(t+1)\left(t^2-t-6\right)<0$$

$$(t-1)(t+1)(t-3)(t+2)<0$$

Essendo $t>0$ i fattori $(t+1)$ e $(t+2)$ sono sempre positivi

$$(t-1)(t-3)<0$$

$$1<t<3$$

$$3^0<3^x<3$$

$$0<x<1$$

Logaritmi

Equazioni logaritmiche

$$2\log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}}(5x-2) \qquad C.A. \begin{cases} x>0 \\ 5x-2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow x>\frac{2}{5}$$

$$\log_{\frac{2}{3}} x^2 + \log_{\frac{2}{3}} 3 = \log_{\frac{2}{3}}(5x-2)$$

$$\log_{\frac{2}{3}} 3x^2 = \log_{\frac{2}{3}}(5x-2)$$

$$3x^2 = 5x-2$$

$$3x^2-5x+2=0 \qquad x_{1,2} = \frac{5\pm1}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{accett.} \\ 1 & \text{accett.} \end{cases} \qquad S=\left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$$

$$\log_3(x^2+x) - \log_3(x^2-x) = 1 \qquad C.A. \begin{cases} x^2+x>0 \\ x^2-x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-1 \lor x>0 \\ x<0 \lor x>1 \end{cases}$$

$$x<-1 \lor x>1$$

$$\log_3(x^2+x) = \log_3 3 + \log_3(x^2-x)$$

$$\log_3(x^2+x) = \log_3(3x^2-3x)$$

$$x^2+x = 3x^2-3x$$

$$2x^2-4x=0$$

$$2x(x-2)=0 \qquad \begin{matrix} x_1=0 & \text{non accett.} \\ x_2=2 & \text{accett.} \end{matrix} \qquad S=\{2\}$$

$$2\log x - \log(x-1) = 2\log 2$$

$$\text{c.A.} \quad \begin{cases} x>0 \\ x-1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow x>1$$

$$\log x^2 = \log 4 + \log(x-1)$$

$$\log x^2 = \log 4(x-1)$$

$$x^2 = 4x-4$$

$$x^2-4x+4=0$$

$$(x-2)^2=0$$

$$x=2$$

$$S=\{2\}$$

$$\log_{36}(9x^2-1) - \log_{36}(3x-1) = 1$$

$$\text{c.A.} \quad \begin{cases} 9x^2-1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \dashrightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{3} \vee x>\frac{1}{3} \\ x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$x>\frac{1}{3}$$

$$\log_{36}(9x^2-1) = 1 + \log_{36}(3x-1)$$

$$\log_{36}(9x^2-1) = \log_{36}(18x-6)$$

$$9x^2-1 = 18x-6$$

$$9x^2-18x+5=0$$

$$x_{1,2} = \frac{9\pm 6}{9} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{non accett.} \\ \frac{5}{3} & \text{accett.} \end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{5}{3}\right\}$$

$$\log_2 x - \log_2(x+4) + 1 = 0$$

C.A. $\begin{cases} x>0 \\ x+4>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>-4 \end{cases} \rightarrow x>0$

$$\log_2 x + \log_2 2 = \log_2(x+4)$$

$$2x = x+4$$

$x = 4$ accett. $\quad S = \{4\}$

$$\log_2(3x+1) - \log_2(x+2) + 2 = \log_2(9x-4) - \log_2 x$$

$$\log_2(3x+1) + \log_2 4 + \log_2 x = \log_2(x+2) + \log_2(9x-4)$$

$$\log_2(12x^2+4x) = \log_2(9x^2+14x-8)$$

$$12x^2+4x = 9x^2+14x-8$$

$$3x^2-10x+8=0$$

$x_{1,2} = \dfrac{5\pm1}{3} = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{accett.} \\ 2 & \text{accett.} \end{cases} \quad S = \left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$

C.A.

$\begin{cases} 3x+1>0 \\ x+2>0 \\ 9x-4>0 \\ x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ x>-2 \\ x>\frac{4}{9} \\ x>0 \end{cases} \rightarrow x>\frac{4}{9}$

$$\log 3 + \frac{1}{2}\log(x^2-2) = \log(6-x^2)$$

C. A. $\begin{cases} x^2-2>0 \\ 6-x^2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<-\sqrt{2} \lor x>\sqrt{2} \\ -\sqrt{6}<x<\sqrt{6} \end{cases}$

$-\sqrt{6}<x<-\sqrt{2} \lor \sqrt{2}<x<\sqrt{6}$

$$2\log 3 + \log(x^2-2) = 2\log(6-x^2)$$

$$\log 9 + \log(x^2-2) = \log(36-12x^2+x^4)$$

$$9x^2-18 = x^4-12x^2+36$$

$$x^4-21x^2+54=0$$

$$(x^2-3)(x^2-18)=0$$

$x = $
- $-\sqrt{3}$ accett.
- $+\sqrt{3}$ accett.
- $-\sqrt{18}$ non accett.
- $+\sqrt{18}$ non accett.

$S=\{-\sqrt{3}; +\sqrt{3}\}$

$$\log(1-x) - \log(1+x) + \frac{1}{2}\{\log(1+2x) - \log(1-2x)\} = 0$$

C. A. $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \\ 1+2x>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<1 \\ x>-1 \\ x>-\frac{1}{2} \\ x<\frac{1}{2} \end{cases}$

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

$$2\log(1-x) - 2\log(1+x) + \log(1+2x) - \log(1-2x) = 0$$

$$\log(1-x)^2(1+2x) = \log(1+x)^2(1-2x)$$

$$(1-x)^2(1+2x) = (1+x)^2(1-2x)$$

$$(x^2-2x+1)(2x+1) = (x^2+2x+1)(1-2x)$$

$$2x^3+\cancel{x^2}-\cancel{4x^2}-\cancel{2x}+\cancel{2x}+\cancel{1} = \cancel{x^2}+\cancel{2x}+\cancel{1}-2x^3-\cancel{4x^2}-\cancel{2x}$$

$$4x^3=0$$

$x=0$ accett. $S=\{0\}$

$$\frac{1}{2}\log(1+5x) = \log(1+\sqrt{3x})$$

C.A. $\begin{cases} 1+5x>0 \\ 1+\sqrt{3x}>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{5} \\ x\geq 0 \end{cases} \rightarrow x\geq 0$

$$1+5x = 1+3x+2\sqrt{3x}$$

$$2x = 2\sqrt{3x}$$

$$x = \sqrt{3x}$$

$$x^2 = 3x$$

$$x(x-3)=0$$

$x_1 = 0$ accett.

$x_2 = 3$ accett. $\qquad S=\{0;3\}$

$$\log_3(x-2)+2=\log_3 6x$$

C.A.

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 6x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow x>2$$

$$\log_3(x-2)+\log_3 9=\log_3 6x$$

$$\log_3(9x-18)=\log_3 6x$$

$$9x-18=6x$$

$$3x=18$$

$$x=6 \quad \text{acc}$$

$$\log\left(1-\sqrt{x+2}\right) = \frac{1}{2}\log(3x+7)$$

$$2\log\left(1-\sqrt{x+2}\right) = \log(3x+7)$$

$$\log\left(1-\sqrt{x+2}\right)^2 = \log(3x+7)$$

$$1+x+2-2\sqrt{x+2} = 3x+7$$

$$-2\sqrt{x+2} = 2x+4$$

$$\sqrt{x+2} = -x-2$$

$$\begin{cases} -x-2 \geq 0 \\ x+2 = x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x^2+3x+2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -2 \\ x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} -2 \text{ accett.} \\ -1 \text{ non accett.} \end{matrix} \end{cases}$$

$x = -2$ accett.

C.A.

$$\begin{cases} 1-\sqrt{x+2} > 0 \\ 3x+7 > 0 \end{cases}$$

1ª diseq.

$1-\sqrt{x+2} > 0$

$\sqrt{x+2} < 1$

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \end{cases}$$

$-2 \leq x < -1$

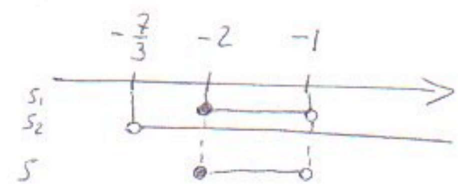
2ª diseq.

$3x+7 > 0$

$3x > -7$

$x > -\frac{7}{3}$

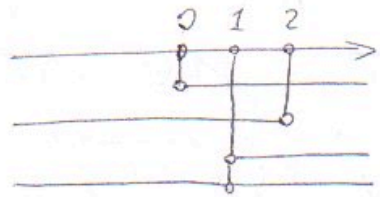
$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x > -\frac{7}{3} \end{cases}$$



$-2 \leq x < 1$

$$\log 2 + \frac{1}{2}\left[\log x + \log(2-x)\right] - 2\log(x-1) = \frac{1}{2}\log 3 - \log(1-x)^2$$

$$\text{c.A.}\quad \begin{cases} x>0 \\ 2-x>0 \\ x-1>0 \\ (1-x)^2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<2 \\ x>1 \\ \forall x \neq 1 \end{cases}$$



$$1<x<2$$

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log(2x-x^2) - \cancel{2\log(x-1)} = \frac{1}{2}\log 3 - \cancel{2\log(x-1)}$$

$$(1-x)^2 = (x-1)^2$$

$$\log(1-x)^2 = \log(x-1)^2 = 2\log(x-1)$$

$$2\log 2 + \log(2x-x^2) = \log 3$$

$$\log 4 + \log(2x-x^2) = \log 3$$

$$\log(8x-4x^2) = \log 3$$

$$8x-4x^2 = 3$$

$$4x^2-8x+3=0$$

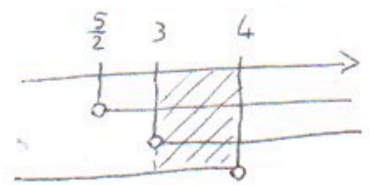
$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{4}}{4} = \begin{cases} - \quad \frac{1}{2} \quad \text{non accett.} \\ + \quad \frac{3}{2} \quad \text{accett.} \end{cases}$$

Disequazioni logaritmiche

$$\log_3 \log_3 (2x-5) < 0$$

$$\begin{cases} \log_3(2x-5) > 0 \\ \log_3 \log_3(2x-5) < \log_3 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-5>0 \\ \log_3(2x-5) > \log_3 1 \\ \log_3(2x-5) < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x-5>1 \\ \log_3(2x-5) < \log_3 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ 2x>6 \\ 2x-5<3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x>3 \\ 2x<8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > \frac{5}{2} \\ x>3 \\ x<4 \end{cases}$$

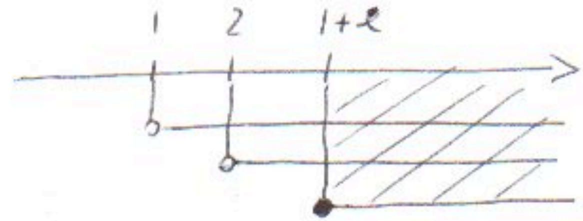


$$S: \quad 3 < x < 4$$

$$\log\log(x-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} \log(x-1) > 0 \\ \log\log(x-1) \geq \log 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ \log(x-1) > \log 1 \\ \log(x-1) \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x-1 > 1 \\ \log(x-1) \geq \log e \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x-1 \geq e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 2 \\ x \geq 1+e \end{cases}$$



$S: \quad x \geq 1+e$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2) + \log_2(x-2) \leq -2\log_4(x+1)$$

$$\frac{\log_2(x^2+2)}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2(x-2) \leq -2\,\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4}$$

$$-\log_2(x^2+2) + \log_2(x-2) \leq -\log_2(x+1)$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x+1) \leq \log_2(x^2+2)$$

$$\log_2(x^2-x-2) \leq \log_2(x^2+2)$$

$$x^2-x-2 \leq x^2+2$$

$$x \geq -4 \longrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x\geq -4 \end{cases} \rightarrow \boxed{x>2}$$

C.A.

$$\begin{cases} x^2+2>0 \\ x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x>2 \\ x>-1 \end{cases} \rightarrow x>2$$

$$\begin{cases} \dfrac{\log_2(x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)} \leq 0 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 > 0 \end{cases}$$

1ª diseq. $\qquad \dfrac{\log_2(x+2)}{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)} \leq 0$

$N > 0$ $\qquad$ C.A. $x > -2$

$\log_2(x+2) > 0$

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -2 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow \quad x > -1$$

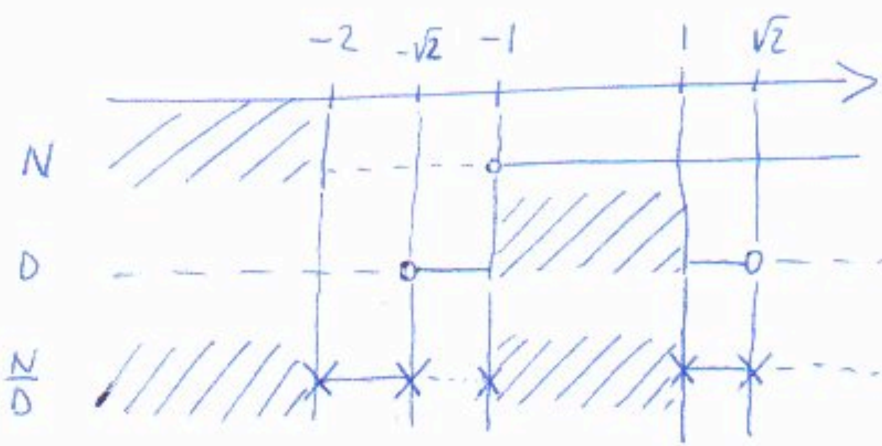
$D > 0$ $\qquad$ C.A. $x < -1 \ \vee \ x > 1$

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) > 0$

$$\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$-\sqrt{2} < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < \sqrt{2}$



$-\sqrt{2} < x < -1 \quad \vee \quad x > \sqrt{2}$

2^{a} diseq. $\quad \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 > 0$

$t = \log_2 x$

$t^2 - 3t + 2 > 0$

$t_{1,2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

$t < 1 \quad \vee \quad t > 2$

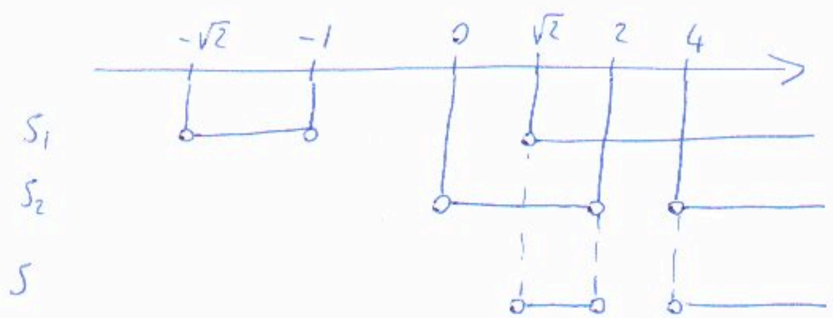
$\log_2 x < 1 \quad \vee \quad \log_2 x > 2$

$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x < \log_2 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > \log_2 4 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \\ x < 2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x > 0 \\ x > 4 \end{cases}$

$0 < x < 2 \quad \vee \quad x > 4$

Soluzioni del sistema:



$\boxed{\sqrt{2} < x < 2 \quad \vee \quad x > 4}$

$$\begin{cases} \dfrac{2-\log_{\frac{1}{2}} x}{3+\log_2 x} \leq 0 \\ \log_{16} \dfrac{x+1}{2x-1} > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1ª diseq.

$$\frac{2+\log_2 x}{3+\log_2 x} \leq 0$$

C.A. $x>0$

$N>0$

$2+\log_2 x > 0$

$\log_2 x > \log_2 2^{-2}$

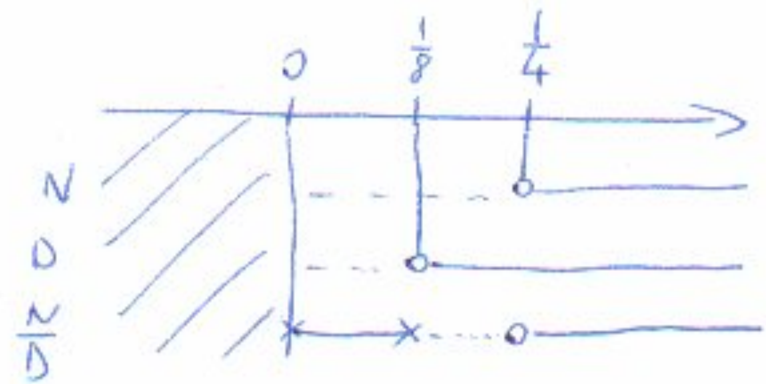
$x > \frac{1}{4}$

$D>0$

$3+\log_2 x > 0$

$\log_2 x > \log_2 2^{-3}$

$x > \frac{1}{8}$



$$\frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4}$$

2ª diseq.

$$\log_{16} \frac{x+1}{2x-1} > \frac{1}{2}$$

C.A. $\frac{x+1}{2x-1} > 0$ $\quad x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2}$

$$\log_{16} \frac{x+1}{2x-1} > \log_{16} 4$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{x+1}{2x-1} - 4 > 0 \end{cases}$$

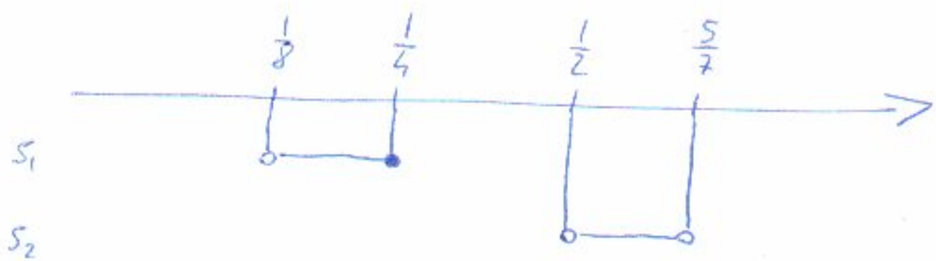
$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{-7x+5}{2x-1} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{7x-5}{2x-1} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \quad \vee \quad x > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} < x < \frac{5}{7} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} < x < \frac{5}{7}$$

Soluzioni del sistema :



$$\boxed{S = \emptyset}$$

$$\frac{\log_3 x+1}{\log_3 x-1}-\frac{\log_3 x+2}{\log_3 x-2}+3\leq 0$$

$$t=\log_3 x$$

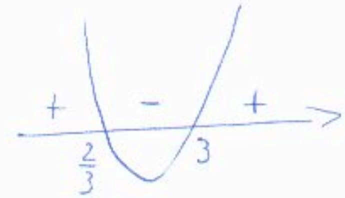
$$\frac{t+1}{t-1}-\frac{t+2}{t-2}+3\leq 0$$

$$\frac{\cancel{t^2}-2t+t-2-\cancel{t^2}-2t+t+2+3t^2-6t-3t+6}{(t-1)(t-2)}\leq 0$$

$$\frac{3t^2-11t+6}{(t-1)(t-2)}\leq 0$$

$N > 0$

$3t^2 - 11t + 6 > 0 \qquad t_{1,2} = \dfrac{11 \pm 7}{6} = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ 3 \end{cases}$

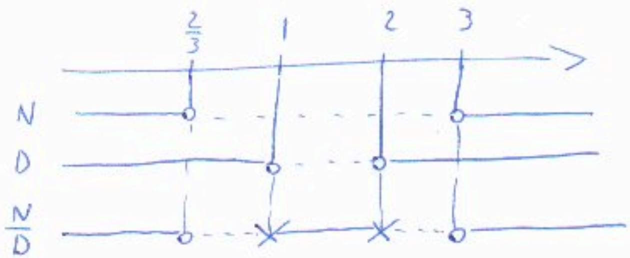


$t < \frac{2}{3} \quad \vee \quad t > 3$

$D > 0$

$(t-1)(t-2) > 0$

$t < 1 \quad \vee \quad t > 2$



$\frac{2}{3} \leq t < 1 \qquad \vee \qquad 2 < t \leq 3$

$\frac{2}{3} \leq \log_3 x < 1 \qquad \vee \qquad 2 < \log_3 x \leq 3 \qquad\qquad$ C.A. $\quad x > 0$

$\log_3 3^{\frac{2}{3}} \leq \log_3 x < \log_3 3 \qquad \vee \qquad \log_3 9 < \log_3 x \leq \log_3 27$

$$\boxed{\sqrt[3]{9} \leq x < 3 \qquad \vee \qquad 9 < x \leq 27}$$

Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

$$1+9^{x-1}=\frac{8}{3}+3^{x-1}-3^{x-2}$$

$$1+\frac{1}{9}\cdot 3^{2x}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}-\frac{1}{9}\cdot 3^{x} \qquad t=3^{x}$$

$$1+\frac{1}{9}t^{2}=\frac{8}{3}+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t$$

$$9+t^{2}=24+3t-t$$

$$t^{2}-2t-15=0 \qquad t_{1,2}=1\pm\sqrt{16}=1\pm 4=\begin{cases}-3\\ 5\end{cases}$$

$t=-3 \rightarrow 3^{x}=-3$ impossibile

$t=5 \rightarrow 3^{x}=5 \rightarrow x=\log_{3}5$

$$\frac{1}{7^{x}+1}+\frac{7^{x}}{49^{x}-1}=\frac{2\cdot 7^{x}-1}{7^{x}-1} \qquad t=7^{x}$$

$$\frac{1}{t+1}+\frac{t}{t^{2}-1}=\frac{2t-1}{t-1} \qquad t\neq -1 \quad t\neq 1$$

$$\frac{t-1+t}{(t+1)(t-1)}=\frac{2t^{2}-t+2t-1}{(t+1)(t-1)}$$

$$\cancel{2t}-\cancel{1}=2t^{2}-t+\cancel{2t}-\cancel{1}$$

$$t(2t-1)=0$$

$t_{1}=0 \rightarrow 7^{x}=0$ impossibile

$t_{2}=\frac{1}{2} \rightarrow 7^{x}=\frac{1}{2} \rightarrow \log 7^{x}=\log\frac{1}{2}$

$$x\log 7=-\log 2 \qquad x=-\frac{\log 2}{\log 7}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}-\left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}\right]\cdot\frac{27}{2}=\frac{4^{x-1}}{9^x}$$

$$\left[\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}\right]\cdot\frac{27}{2}=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$$

$$t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$$

$$\left[\frac{3}{2}t-\frac{4}{9}t^2\right]\cdot\frac{27}{2}=\frac{1}{4}t^2$$

$$\frac{81}{4}t-6t^2-\frac{1}{4}t^2=0$$

$$81t-25t^2=0$$

$$t_1=0 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=0 \quad \text{impossibile}$$

$$t_2=\frac{81}{25} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{81}{25}$$

$$\operatorname{Log}\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\operatorname{Log}\frac{81}{25}$$

$$x\operatorname{Log}\frac{2}{3}=\operatorname{Log}\frac{81}{25}$$

$$x=\frac{\operatorname{Log}\frac{81}{25}}{\operatorname{Log}\frac{2}{3}}=\frac{\operatorname{Log}81-\operatorname{Log}25}{\operatorname{Log}2-\operatorname{Log}3}$$

$$3^x + 5 \cdot 3^{x+1} = 2^{2x-1}$$

$$3^x + 15 \cdot 3^x = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x}$$

$$16 \cdot 3^x = \frac{1}{2} \cdot 2^{2x}$$

$$32 \cdot 3^x = 2^{2x}$$

$$\log(32 \cdot 3^x) = \log 2^{2x}$$

$$\log 32 + \log 3^x = 2x \log 2$$

$$\log 2^5 + x \log 3 = 2x \log 2$$

$$5 \log 2 = x (2 \log 2 - \log 3)$$

$$x = \frac{5 \log 2}{2 \log 2 - \log 3}$$

$$2\cdot 3^{1-x}+2^{x+2}=\sqrt{3^{1-2x}}+10\sqrt{4^{x-1}}$$

$$6\cdot 3^{-x}+4\cdot 2^{x}=3^{\frac{1-2x}{2}}+10\cdot 2^{2\cdot\frac{x-1}{2}}$$

$$6\cdot 3^{-x}+4\cdot 2^{x}=\sqrt{3}\cdot 3^{-x}+10\cdot 2^{x-1}$$

$$(6-\sqrt{3})\cdot 3^{-x}=(5-4)\cdot 2^{x}$$

$$6-\sqrt{3}=2^{x}\cdot 3^{x}$$

$$6-\sqrt{3}=6^{x} \rightarrow \log 6^{x}=\log(6-\sqrt{3}) \rightarrow x\log 6=\log(6-\sqrt{3}) \rightarrow x=\frac{\log(6-\sqrt{3})}{\log 6}$$

$$8^{x}=4^{x-3}\cdot 3$$

$$2^{3x}=\frac{3}{64}2^{2x}$$

$$2^{2x}\left(2^{x}-\frac{3}{64}\right)=0$$

$2^{2x}=0$ impossibile

$$2^{x}=\frac{3}{64} \rightarrow x\log 2=\log 3-\log 64$$

$$x=\frac{\log 3-6\log 2}{\log 2}$$

$$9^{x-1} + 2\cdot 5^{1-2x} = 3^{2x-3} + 25^{1-x}$$

$$3^{2x-2} + 10\cdot 5^{-2x} = \frac{1}{27}\cdot 3^{2x} + 5^{2-2x}$$

$$\frac{1}{9}\cdot 3^{2x} + 10\cdot 5^{-2x} = \frac{1}{27}\cdot 3^{2x} + 25\cdot 5^{-2x}$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{27}\right)\cdot 3^{2x} = 15\cdot 5^{-2x}$$

$$\frac{2}{27}\cdot 3^{2x} = 15\cdot 5^{-2x}$$

$$3^{2x}\cdot 5^{2x} = 81\cdot\frac{5}{2}$$

$$15^{2x} = 81\cdot\frac{5}{2}$$

$$\log 15^{2x} = \log 81\cdot\frac{5}{2}$$

$$2x\log 15 = \log 81 + \log 5 - \log 2$$

$$x = \frac{\log 81 + \log 5 - \log 2}{2\log 15}$$

$$3\cdot 8^x = 3^x$$

$$\log(3\cdot 8^x) = \log 3^x$$

$$\log 3 + \log 8^x = x\log 3$$

$$\log 3 + x\log 8 = x\log 3$$

$$\log 3 = x(\log 3 - \log 8)$$

$$x = \frac{\log 3}{\log 3 - \log 8}$$

$$\frac{5^x-4}{5^x-1} + \frac{4}{25^x-5^x} = 0 \qquad t=5^x$$

$$\frac{t-4}{t-1} + \frac{4}{t^2-t} = 0 \qquad t\neq 0 \quad t\neq 1$$

$$t^2-4t+4=0$$

$$(t-2)^2=0$$

$$t=2 \rightarrow 5^x=2 \rightarrow x=\log_5 2$$

$$4^{2-x} - 5^{x-1} = 5^{x+1} - \frac{1}{2^{2x+1}}$$

$$16 \cdot 2^{-2x} - \frac{1}{5} \cdot 5^{x} = 5 \cdot 5^{x} - \frac{1}{2} \cdot 2^{-2x}$$

$$\left(16 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{-2x} = \left(5 + \frac{1}{5}\right) \cdot 5^{x}$$

$$\frac{33}{2} \cdot 2^{-2x} = \frac{26}{5} \cdot 5^{x}$$

$$\frac{165}{52} = 20^{x} \longrightarrow \log 20^{x} = \log \frac{165}{52} \rightarrow x \log 20 = \log \frac{165}{52}$$

$$x = \frac{\log 165 - \log 52}{\log 20} = \frac{\log 165 - \log 52}{\log 5 + \log 4}$$

$$\sqrt{49^{x+1}} + 7^{x-1} = 5^x$$

$$7^{2\cdot\frac{x+1}{2}} + 7^{x-1} = 5^x$$

$$7 \cdot 7^x + \frac{1}{7} \cdot 7^x = 5^x$$

$$\frac{50}{7} \cdot 7^x = 5^x$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{7}{50}$$

$$\log\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log\frac{7}{50} \longrightarrow x \log\frac{7}{5} = \log\frac{7}{50}$$

$$x = \frac{\log 7 - \log 50}{\log 7 - \log 5} = \frac{\log 7 - \log 5 - 1}{\log 7 - \log 5}$$

$4^x - 2^{x+3} + 15 = 0 \qquad t = 2^x$

$t^2 - 8t + 15 = 0$

$t_{1,2} = 4 \pm 1 = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right.$

$2^x = 3 \rightarrow x = \log_2 3$

$2^x = 5 \rightarrow x = \log_2 5$

$9^x - 11 \cdot 3^x + 28 = 0$

$3^x = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \left\langle \begin{matrix} -\ 4 \\ +\ 7 \end{matrix} \right.$

$3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4$

$3^x = 7 \rightarrow x = \log_3 7$

Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

$$2^{x+1} \geq 5^{1-x}$$

$$\log 2^{x+1} \geq \log 5^{1-x}$$

$$(x+1)\log 2 \geq (1-x)\log 5$$

$$x\log 2 + \log 2 \geq \log 5 - x\log 5$$

$$x(\log 2 + \log 5) \geq \log 5 - \log 2$$

$$x \log 10 \geq \log \frac{5}{2}$$

$$x \geq \log \frac{5}{2}$$

$$3^{x+2} < 4^{2x+1}$$

$$9 \cdot 3^{x} < 4 \cdot 16^{x}$$

$$\log(9 \cdot 3^{x}) < \log(4 \cdot 16^{x})$$

$$\log 9 + x\log 3 < \log 4 + x\log 16$$

$$x(\log 3 - \log 16) < \log 4 - \log 9$$

$$x(\log 16 - \log 3) > \log 9 - \log 4$$

$$x > \frac{\log 9 - \log 4}{\log 16 - \log 3}$$

$$\frac{2^{x-1}\cdot 4^{1+x}}{6^{1-x}} < 3$$

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^x\cdot 4\cdot 4^x}{6\cdot\frac{1}{6^x}} < 3$$

$$\frac{1}{3}\cdot 48^x < 3$$

$$48^x < 9$$

$$\log 48^x < \log 9$$

$$x\log 48 < \log 9$$

$$x < \frac{\log 9}{\log 48}$$

$$5^{2x} > 10^{x+1}$$

$$\log 5^{2x} > \log 10^{x+1}$$

$$2x\log 5 > x+1$$

$$x(2\log 5 - 1) > 1$$

$$x > \frac{1}{2\log 5 - 1}$$

$$2^{2x+1} \geqslant 5^{1-x}$$

$$(2x+1)\log 2 \geqslant (1-x)\log 5$$

$$x(2\log 2 + \log 5) \geqslant \log 5 - \log 2$$

$$x \geqslant \frac{\log 5 - \log 2}{\log 5 + \log 4}$$

$$3^{x+1} - 2^{x-1} > 3^x$$

$$3 \cdot 3^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x > 3^x$$

$$2 \cdot 3^x > \frac{1}{2} \cdot 2^x$$

$$4 \cdot 3^x > 2^x$$

$$\log 4 + x\log 3 > x\log 2$$

$$x(\log 3 - \log 2) > -\log 4$$

$$x > \frac{-\log 4}{\log 3 - \log 2}$$

$$x > \frac{\log 4}{\log 2 - \log 3}$$

$$64-2\cdot 3^{x} > 45+3^{2-x} \qquad t=3^{x}$$

$$64-2t > 45+\frac{9}{t}$$

$$19t-2t^{2}-9>0$$

$$2t^{2}-19t+9<0 \qquad \Delta=289=17^{2}$$

$$t_{1,2}=\frac{19\pm 17}{4}=\left\langle \begin{matrix}\frac{1}{2}\\ 9\end{matrix}\right.$$

$$\frac{1}{2}<t<9$$

$$\frac{1}{2}<3^{x}<3^{2}$$

$$\log\frac{1}{2}<x\log 3<2\log 3$$

$$-\frac{\log 2}{\log 3}<x<2$$

$$5\cdot 3^{1+x}+6^{1-x}>0$$

$$15\cdot 3^{x}+\frac{6}{6^{x}}>0$$

$$18^{x}+\frac{6}{15}>0$$

$$18^{x}>-\frac{2}{5}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}$$

$$2\cdot 5^{x}+4\cdot 5^{3-x}<205 \qquad t=5^{x}$$

$$2t+\frac{500}{t}-205<0$$

$$2t^{2}-205t+500<0 \qquad \Delta=195^{2}$$

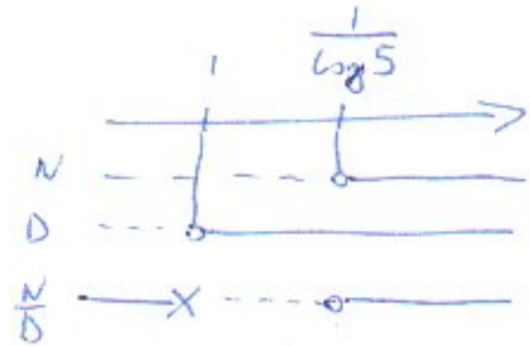
$$t_{1,2}=\frac{205\pm 195}{4}=\begin{cases}\frac{5}{2}\\ 100\end{cases}$$

$$\frac{5}{2}<t<100 \;\rightarrow\; \frac{5}{2}<5^{x}<100 \;\rightarrow\; \log 5-\log 2<x\log 5<2$$

$$1-\frac{\log 2}{\log 5}<x<\frac{2}{\log 5}$$

$$\frac{5^{x}-10}{5^{x}-5}>0$$

$N>0$	$D>0$
$5^{x}-10>0$	$5^{x}-5>0$
$5^{x}>10$	$5^{x}>5$
$x\log 5>1$	$x>1$
$x>\frac{1}{\log 5}\approx 1{,}43$	



$$x<1 \;\vee\; x>\frac{1}{\log 5}$$

$$\frac{2^x(3\cdot 2^x-5)+2}{1-3^x}>0$$

$$\frac{3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2}{1-3^x}>0$$

$N>0 \qquad t=2^x$

$3t^2-5t+2>0$

$t_{1,2}=\dfrac{5\pm 1}{6}=\Big\langle\begin{array}{l}\frac{2}{3}\\ 1\end{array}$

$t<\frac{2}{3} \quad \vee \quad t>1$

$2^x<\frac{2}{3} \quad \vee \quad 2^x>2^0$

$x<\log_2\frac{2}{3} \quad \vee \quad x>0$

$x<1-\log_2 3 \quad \vee \quad x>0$

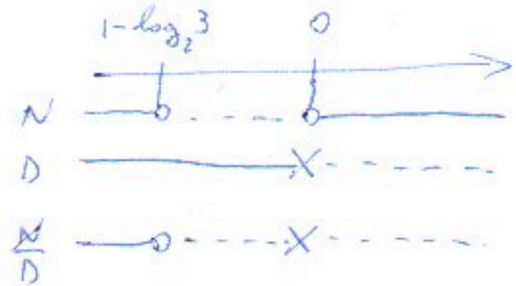
$D>0$

$1-3^x>0$

$-3^x>-1$

$3^x<3^0$

$x<0$



$x<1-\log_2 3$

$$\frac{5^x-10}{5^x-5}>0$$

$N>0$

$5^x-10>0$

$5^x>10$

$x\log 5>1$

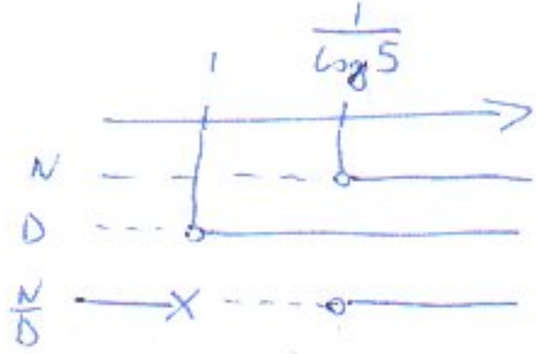
$x>\frac{1}{\log 5}\approx 1{,}43$

$D>0$

$5^x-5>0$

$5^x>5$

$x>1$



$x<1 \quad \vee \quad x>\frac{1}{\log 5}$

$$6^{x+1}+6^x+6^{x-1}<6$$

$$\left(6+1+\frac{1}{6}\right)6^x<6$$

$$6^x<\frac{36}{43}$$

$$x<2-\log_6 43$$

$$9^x-10\cdot 3^x+25\geq 0$$

$$\left(3^x-5\right)^2\geq 0$$

$$\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\frac{2^x - 4^x - 1}{3^{-x} - 25 \cdot 3^x} < 0$$

$N > 0$

$-4^x + 2^x - 1 > 0$

$t = 2^x$

$-t^2 + t - 1 > 0$

$t^2 - t + 1 < 0$

$\emptyset$

$D > 0$

$3^{-x} - 25 \cdot 3^x > 0$

$t = 3^x$

$\frac{1}{t} - 25t > 0$

$1 - 25t^2 > 0$

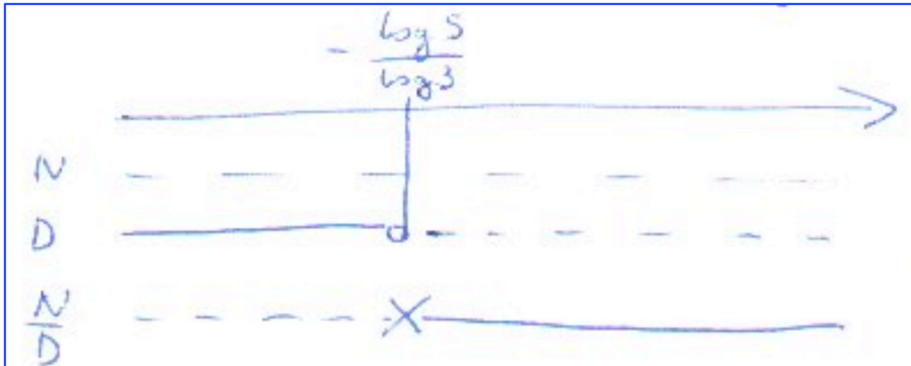
$t^2 < \frac{1}{25}$

$-\frac{1}{5} < t < \frac{1}{5}$

$t < \frac{1}{5}$

$3^x < \frac{1}{5}$

$x < -\frac{\log 5}{\log 3}$



$$x < -\frac{\log 5}{\log 3}$$

Goniometria

Esercizi vari di goniometria

Qual è l'uguaglianza vera?

(a) $\sin \frac{15}{4}\pi = -\sin \frac{\pi}{4}$

(b) $\sin \frac{15}{4}\pi = \sin \frac{\pi}{4}$

(c) $\sin \frac{15}{4}\pi = \cos \frac{\pi}{4}$

(d) $\sin \frac{15}{4}\pi = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin \frac{15}{4}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{7}{4}\pi\right) = \sin \frac{7}{4}\pi = -\sin \frac{\pi}{4}$$

angoli esplementari

Risposta ESATTA (a)

Determina la relazione che è soddisfatta dai tre numeri x, y, z assegnati.

$x = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6}$ $\quad y = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$ $\quad z = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$

(a) $z < y < x$

(b) $x < z < y$

(c) $y < z < x$

(d) nessuna delle altre

$1 < \sqrt{2} < 2$

$y < z < x$

Risposta ESATTA (c)

$$x = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$y = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$$

$$z = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

L'ampiezza in gradi dell'angolo di $\frac{11}{6}\pi$ radianti è

(a) $150°$

(b) $390°$

(c) $210°$

(d) $330°$

$$\frac{11}{6}\pi : 2\pi = x : 360°$$

$$x = \frac{\frac{11}{6}\cancel{\pi} \cdot \overset{180}{\cancel{360°}}}{\cancel{2\pi}} = 330°$$

Risposta ESATTA: (d)

Se $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ allora

(a) $\cot g\,\alpha = \frac{4}{3}$

(b) $\cot g\,\alpha = \frac{3}{4}$

(c) $\cot g\,\alpha = \frac{25}{12}$

(d) $\cot g\,\alpha = \frac{12}{25}$

I quadrante

$$\cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cot g\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{\cancel{5}}\cdot\frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$$

Risposta ESATTA: (a)

$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3} \longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{25}{9}}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

$\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\right)$

$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2} \longrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{1+x^2} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$

$$\cos\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$$

$$\alpha = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \longrightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4} \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$$

$$\cos\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right] = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\arcsin\left(\sin\frac{5}{2}\pi\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{5}}{5} \longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{1-\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} + \mathrm{cotg}\,\frac{3}{4}\pi =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot 1 - 1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{+1} + \sqrt{2} \cancel{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} + \mathrm{cotg}\,\frac{3}{4}\pi =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\cdot 1 - 1 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cancel{+1} + \sqrt{2} \cancel{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathrm{cotg}\,\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{3}{4}\pi} = \frac{1}{\mathrm{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}} = -1$$

$$\sin\left(-\frac{25}{3}\pi\right)+\sqrt{3}\cos\frac{25}{3}\pi-\operatorname{tg}\frac{25}{3}\pi+\operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi=$$

$$=-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cancel{-\sqrt{3}}+\cancel{\sqrt{3}}=0$$

$$\sin\left(-\frac{25}{3}\pi\right)=-\sin\frac{25}{3}\pi=$$

$$=-\sin\left(\frac{25}{3}\pi-8\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{25}{3}\pi=\cos\left(\frac{25}{3}\pi-8\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{25}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(\frac{25}{3}\pi-8\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{13}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(\frac{13}{3}\pi-4\pi\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{7}{6}\pi+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot 2-1=$$

$$=1+1-1-1=0$$

$$\operatorname{tg}\frac{7}{6}\pi=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi=-\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{7}{4}\pi\right)=$$

$$=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=-1$$

Identità goniometriche

$$(1-\cos\alpha\cos\beta)^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)^2$$

I membro

$$(1-\cos\alpha\cos\beta)^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta - (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) =$$

$$= \cancel{1} - 2\cos\alpha\cos\beta + \cancel{\cos^2\alpha\cos^2\beta} - \cancel{1} + \cos^2\alpha + \cos^2\beta - \cancel{\cos^2\alpha\cos^2\beta} =$$

$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2$$

$$\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha} = |\cos\alpha - \sin\alpha|$$

I membro

$$\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} =$$

$$= |\cos\alpha - \sin\alpha|$$

perchè

$$\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}} = |tg\alpha + cotg\alpha|$$

II membro

$$|tg\alpha + cotg\alpha| = \left|\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right| = \left|\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,\sin\alpha}\right| = \left|\frac{1}{\cos\alpha\,\sin\alpha}\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,\sin^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

I membro

$$\frac{2\cos 2\alpha + \sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha - \sin 4\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos 2\alpha - 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{\cancel{2\cos 2\alpha}\,(1+\sin 2\alpha)}{\cancel{2\cos 2\alpha}\,(1-\sin 2\alpha)} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$$

II membro

$$\frac{\sec 2\alpha + tg\,2\alpha}{\sec 2\alpha - tg\,2\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos 2\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{\frac{1}{\cos 2\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} = \frac{1+\sin 2\alpha}{\cancel{\cos 2\alpha}}\cdot\frac{\cancel{\cos 2\alpha}}{1-\sin 2\alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$$

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

I membro

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1 =$$

$$= \cancel{1} + 2\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

II membro

$$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{2\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\;\frac{\cos^{\cancel{2}}\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin(45°-\alpha) + \cos(45°+\alpha) = \frac{\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$$

I membro

$$\sin(45°-\alpha)+\cos(45°+\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha$$

II membro

$$\frac{\sqrt{2}\cos 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\,(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\,\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cancel{(\cos\alpha+\sin\alpha)}} = \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)-1=\operatorname{cosec}\alpha-\cos\alpha\left(1+\operatorname{cotg}\alpha\right)$$

I membro

$$\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)-1=\sin\alpha\,\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-1=\frac{\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha-1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\left(1+\cos\alpha\right)-\cos^2\alpha-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(1+\cos\alpha\right)-\cos\alpha\left(\cos\alpha+1\right)}{1+\cos\alpha}=\frac{\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)\cancel{\left(1+\cos\alpha\right)}}{\cancel{1+\cos\alpha}}=$$

$$=\sin\alpha-\cos\alpha$$

II membro

$$\operatorname{cosec}\alpha-\cos\alpha\left(1+\operatorname{cotg}\alpha\right)=\frac{1}{\sin\alpha}-\cos\alpha\left(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}-\cos\alpha-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin\alpha}-\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}-\cos\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha$$

$$tg\,2\alpha - tg\,\alpha = \frac{1}{2}\sec^2\alpha\; tg\,2\alpha$$

II membro

$$\frac{1}{2}\sec^2\alpha\; tg\,2\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot tg\,2\alpha = \frac{1}{2}\left(1+tg^2\alpha\right)\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{tg\,\alpha\left(1+tg^2\alpha\right)}{1-tg^2\alpha}$$

I membro

$$tg\,2\alpha - tg\,\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} - tg\,\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha - tg\,\alpha + tg^3\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{tg\,\alpha + tg^3\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{tg\,\alpha\left(1+tg^2\alpha\right)}{1-tg^2\alpha}$$

$$\frac{tg\,2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{tg\,2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$$

I membro $\quad \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \quad$ II membro

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot g\,\frac{\alpha+\beta}{2}$$

I membro

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\cancel{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}} = \cot g\,\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{\cot g\,\alpha}{tg\,3\alpha}$$

I membro

$$\frac{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \frac{2\cos 3\alpha\cos(-\alpha)}{-2\sin 3\alpha\sin(-\alpha)} = \frac{\cancel{2}\cos 3\alpha\cos\alpha}{\cancel{2}\sin 3\alpha\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}} = \frac{\cot g\,\alpha}{tg\,3\alpha}$$

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sec\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sec\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

I membro

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\frac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\frac{1}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}=\frac{\sec\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sec\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

I membro

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\cancel{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\cancel{2}\cancel{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$\frac{\cos(45°+\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{2\cos(45°-\alpha)}$$

I membro

$$\frac{\cos(45°+\alpha)}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 45° \cos\alpha - \sin 45° \sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cancel{(\cos\alpha - \sin\alpha)}}{(\cos\alpha+\sin\alpha)\cancel{(\cos\alpha-\sin\alpha)}} = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

II membro

$$\frac{1}{2\cos(45°-\alpha)} = \frac{1}{2(\cos 45° \cos\alpha + \sin 45° \sin\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{2(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = (\cos\alpha+\sin\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha$$

I membro

$$\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$$

II membro

$$(\cos\alpha+\sin\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)\,\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$

I membro $\qquad \sin(\alpha+\beta)\,\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos 2\beta - \cos 2\alpha\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cos^2\beta - 1 - 2\cos^2\alpha + 1\right] = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$$ II membro

$$\sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = 1 - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

I membro

$$\sin^2(\alpha-\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 =$$

$$= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta =$$

$$= \cos^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \sin^2\beta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta =$$

$$= \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\sin 2\alpha\sin\beta\cos\beta = 1 - \sin 2\alpha\sin 2\beta$$ II membro

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$$

I membro $\quad \sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$

$= \sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha +$

$- \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$ $\quad$ II membro

$$\sin\alpha - \cos\alpha \, tg\frac{\alpha}{2} = tg\frac{\alpha}{2} \qquad t = tg\frac{\alpha}{2}$$

I membro $\quad \sin\alpha - \cos\alpha\, tg\frac{\alpha}{2} = \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t = \frac{2t - t + t^3}{1+t^2} = \frac{t+t^3}{1+t^2} = \frac{t\cancel{(1+t^2)}}{\cancel{1+t^2}} = t = tg\frac{\alpha}{2}$

$$\frac{2\sin 2\alpha + 1}{2\sin 2\alpha - 1} = \frac{tg(\alpha + 15°)}{tg(\alpha - 15°)}$$

II membro $\quad \frac{tg(\alpha+15°)}{tg(\alpha-15°)} = \frac{\sin(\alpha+15°)\cos(\alpha-15°)}{\cos(\alpha+15°)\sin(\alpha-15°)} = \frac{\frac{1}{2}[\sin 2\alpha + \sin 30°]}{\frac{1}{2}[\sin 2\alpha + \sin(-30°)]} = \frac{2\sin 2\alpha + 1}{2\sin 2\alpha - 1}$

$$\frac{2\sin 2\alpha - \sqrt{2}}{2\cos 2\alpha + \sqrt{2}} = tg\left(\alpha - \frac{45°}{2}\right)$$

I membro $\quad \frac{2\sin 2\alpha - \sqrt{2}}{2\cos 2\alpha + \sqrt{2}} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 45°}{\cos 2\alpha + \cos 45°} = \frac{\cancel{2\cos\left(\alpha + \frac{45°}{2}\right)}\sin\left(\alpha - \frac{45°}{2}\right)}{\cancel{2\cos\left(\alpha + \frac{45°}{2}\right)}\cos\left(\alpha - \frac{45°}{2}\right)} = tg\left(\alpha - \frac{45°}{2}\right)$

Equazioni goniometriche

$2\sin^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0$

$2\sin^2 x - 4\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0$

$3\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

$-3\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$

$\cos 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad , k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{\cot x}{2\sin x} \qquad \sin x \neq 0 \qquad x \neq k\pi$

$\frac{2\cos^2 x}{\cancel{2\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\cancel{2\sin^2 x}}$

$2\cos^2 x - \cos x = 0 \qquad \cos x = 0 \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x(2\cos x - 1) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \vee \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$2\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

$$2\sin^2 x - \sin x\cos x + \cancel{3\cos^2 x} - \cancel{3\cos^2 x} - 3\sin^2 x = 0$$

$$-\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0 \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 1) = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -1$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cancel{\cos^2 x} = \cancel{\cos^2 x} - \sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 0 \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$2\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 0$$

$$2\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 1) = 0 \longrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = -1$$

$$x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$2\cos x = 1 + \sin x$$

$$2\cos x - \sin x - 1 = 0 \qquad X = \cos x \quad Y = \sin x$$

$$\begin{cases} 2X - Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = 2X - 1 \\ X^2 + 4X^2 - 4X + 1 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Y = 2X - 1 \\ 5X^2 - 4X = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} X_2 = \frac{4}{5} \\ Y_2 = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2K\pi \quad \vee \quad x = \arcsin\frac{3}{5} + 2K\pi$$

$$x \approx 36{,}87° + K\,360°$$

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \cot g\, x = 2\cos x$$

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} - 2\cos x = 0 \qquad \sin x \neq 0 \quad \sin x \neq -1$$

$$x \neq K\pi \qquad x \neq +\frac{3}{2}\pi + 2K\pi$$

$$\cos x \left(\frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{\sin x} - 2 \right) = 0$$

$$\cos x \; \frac{\cancel{\sin x} + 1 + \cancel{\sin x} - \cancel{2\sin x} - 2\sin^2 x}{\sin x\,(1 + \sin x)} = 0$$

$$\cos x \left(1 - 2\sin^2 x \right) = 0 \longrightarrow \cos x = 0 \quad \vee \quad \sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 90° + K360° \quad \vee \quad x = \pm 45° + K\,360° \quad \vee \quad x = \pm 135° + K360°$$

La soluzione $x = -90° + K360°$ NON è accettabile

$$2\sin^3 x-\sqrt{3}\sin^2 x=2\sin x-\sqrt{3}$$
$$\sin^2 x\,(2\sin x-\sqrt{3})-(2\sin x-\sqrt{3})=0$$
$$(\sin^2 x-1)(2\sin x-\sqrt{3})=0$$
$$\sin x=-1 \quad \vee \quad \sin x=+1 \quad \vee \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x=270^\circ+K360^\circ \quad \vee \quad x=90^\circ+K360^\circ \quad \vee \quad x=60^\circ+K360^\circ \quad \vee \quad x=120^\circ+K360^\circ$$

$$\sin(45^\circ+x)+\sin(45^\circ-x)=\sqrt{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}=\sqrt{2}$$
$$\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2} \longrightarrow \cos x=1 \longrightarrow x=K360^\circ$$

$$\cos(x+\alpha)+\sin\alpha\sin x=\cos\alpha$$
$$\cos x\cos\alpha-\cancel{\sin x\sin\alpha}+\cancel{\sin\alpha\sin x}-\cos\alpha=0$$
$$\cos\alpha(\cos x-1)=0$$

per $\cos\alpha\neq 0$:

$\cos x=1$

$x=K360^\circ$

per $\cos\alpha=0$:

$\forall x\in\mathbb{R}$

$$\cos 2x + \cos x - \sin x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x - \sin x = 0$$

$$(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x) + \cos x - \sin x = 0$$

$$(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x + 1) = 0 \longrightarrow$$

$$\cos x - \sin x = 0 \quad \vee \quad \cos x + \sin x + 1 = 0$$

$$1 - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = 45^\circ + K180^\circ$$

$$\begin{cases} X + Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = -X - 1 \\ 2X^2 + 2X = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} X_2 = -1 \\ Y_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = 45^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = 270^\circ + K360^\circ \quad \vee \quad x = 180^\circ + K360^\circ$$

$$2\cos^2 x + 3\sin^2 x = \frac{5}{2}\sin 2x$$

$$2\cos^2 x - 5\sin x \cos x + 3\sin^2 x = 0$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 2 = 0 \longrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{5 \pm 1}{6} \longrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad \operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \operatorname{arctg}\frac{2}{3} + K180^\circ \quad \vee \quad x = 45^\circ + K180^\circ$$

$$x = 33{,}69^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = 45^\circ + K180^\circ$$

$$\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0 \qquad \cos x \neq 0 \qquad \sin x \neq 0$$

$$\frac{2\cos^2 x}{\cos x} + \frac{2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} = 0$$

$$2\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} = 0$$

$$\cos x\,(2\sin x + 1) = 0 \longrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \longrightarrow x = -30^\circ + K360^\circ \quad \vee \quad x = 210^\circ + K360^\circ$$

$$2\cos^2\frac{x}{2} = \cos 3x + \cos x$$

$$1+\cos x = 2\cos 2x \cos x$$

$$1+\cos x = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)\cos x$$

$$1+\cos x = 4\cos^3 x - 2\cos x$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x - 1 = 0$$

$$\left(\cos x - 1\right)\left(4\cos^2 x + 4\cos x + 1\right) = 0$$

$$\left(\cos x - 1\right)\left(2\cos x + 1\right)^2 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & & 4 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$\cos x = 1$ ✓ $\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = K\,360^\circ$ ✓ $x = \pm 120^\circ + K\,360^\circ$

$x = K\,120^\circ$

$\operatorname{tg} 2x - 3\operatorname{tg} x = 0$ $x \neq \frac{\pi}{2} + K\pi$ $x \neq \frac{\pi}{4} + K\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} - 3\operatorname{tg} x = 0$$

$$2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{tg}^3 x = 0$$

$$\operatorname{tg} x\left(3\operatorname{tg}^2 x - 1\right) = 0$$

$\operatorname{tg} x = 0$ ✓ $\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

$x = K\,180^\circ$ ✓ $x = \pm 30^\circ + K\,180^\circ$

$$3\sin x - \cos x = 3$$

$X = \cos x$, $Y = \sin x$

$$\begin{cases} 3Y - X = 3 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 3Y - 3 \\ 9Y^2 - 18Y + 9 + Y^2 - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 3Y - 3 \\ 10Y^2 - 18Y + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 3Y - 3 \\ 5Y^2 - 9Y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} X_2 = -\frac{3}{5} \\ Y_2 = \frac{4}{5} \end{cases} \rightarrow x = 90^\circ + K\,360^\circ \vee x \approx 126{,}87^\circ + K\,360^\circ$$

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 2\cos x + 2\sin x = 2 + \sqrt{3} \qquad x \neq 180^\circ + K\,360^\circ$$

$$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$$

$$\sqrt{3}\,t + 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\,\frac{2t}{1+t^2} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}\,t + \sqrt{3}\,t^3 \cancel{+2} - 2t^2 + 4t \cancel{-2} - \sqrt{3} - 2t^2 - \sqrt{3}\,t^2 = 0$$

$$\sqrt{3}\,t^3 - (4+\sqrt{3})\,t^2 + (4+\sqrt{3})\,t - \sqrt{3} = 0$$

	$\sqrt{3}$	$-4-\sqrt{3}$	$4+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
1		$\sqrt{3}$	-4	$\sqrt{3}$
	$\sqrt{3}$	-4	$\sqrt{3}$	0

$$(t-1)\left(\sqrt{3}\,t^2 - 4t + \sqrt{3}\right) = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} = \begin{cases} - & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ + & \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = 1 \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = 45^\circ + K\,180^\circ \qquad \frac{x}{2} = 30^\circ + K\,180^\circ \qquad \frac{x}{2} = 60^\circ + K\,180^\circ$$

$$x = 90^\circ + K\,360^\circ \qquad x = 60^\circ + K\,360^\circ \qquad x = 120^\circ + K\,360^\circ$$

$$\sin x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \cos x \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{2} \neq 90^\circ + K\,180^\circ$$

$$x \neq 180^\circ + K\,360^\circ$$

$$\frac{2t}{1+t^2} - t = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$2t - t - t^3 - 1 + t^2 = 0$$

$$-t^3 + t^2 + t - 1 = 0$$

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0$$

$$t^2(t-1) - (t-1) = 0$$

$$(t-1)^2(t+1) = 0$$

$$t = -1 \quad \vee \quad t = 1$$

$$\frac{x}{2} = -45^\circ + K\,180^\circ \quad \vee \quad \frac{x}{2} = 45^\circ + K\,180^\circ$$

$$x = -90^\circ + K\,360^\circ \quad \vee \quad x = 90^\circ + K\,360^\circ$$

$$\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + 4\cos^4 x = 1$$

$$-3\sin^2 x \cos^2 x + 3\cos^4 x = 0$$

$$3\cos^2 x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$3\cos^2 x \cos 2x = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \vee \quad \cos 2x = 0$$

$$x = 90^\circ + K\,180^\circ \quad \vee \quad 2x = 90^\circ + K\,180^\circ$$

$$x = 90^\circ + K\,180^\circ \quad \vee \quad x = 45^\circ + K\,90^\circ$$

$$\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x\cos x - 2\cos^2 x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 4\cos^2 x - \sqrt{3}\cos^2 x + \cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$(3-\sqrt{3})\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x - (3+\sqrt{3})\cos^2 x = 0$$

$$(3-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - (3+\sqrt{3}) = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 3 + 9 - 3 = 9 \qquad \mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}\pm 3}{3-\sqrt{3}} = \begin{cases} - \quad -1 \\ + \quad \dfrac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,x = -1 \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,x = 2+\sqrt{3}$$

$$x = -45^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = 75^\circ + K180^\circ$$

$$2\sin^2 x - \sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

$$-\sin^2 x - \sin x\cos x = 0$$

$$\mathrm{tg}\,x\,(\mathrm{tg}\,x + 1) = 0$$

$$\mathrm{tg}\,x = 0 \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,x = -1$$

$$x = K180^\circ \quad \vee \quad x = -45^\circ + K180^\circ$$

$$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{\cot g\, x}{2\sin x} \qquad \sin x \neq 0 \qquad x \neq K180^\circ$$

$$\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x} = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} \qquad \cos x = 0 \quad \vee \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$(2\cos x - 1)\cos x = 0 \qquad x = 90^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = \pm 60^\circ + K360^\circ$$

$$\sec^2 x + 4\cos^2 x = 5 \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq 90^\circ + K180^\circ$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} + 4\cos^2 x - 5 = 0$$

$$4\cos^4 x - 5\cos^2 x + 1 = 0 \qquad \cos^2 x = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} - & \frac{1}{4} \\ + & 1 \end{cases} \qquad \cos x = \pm\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = \pm 1$$

$$x = \pm 60^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = K180^\circ$$

$$\sin^2 2x + 3\cos^2 x = 3 \qquad \cos 2x = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} - & \frac{1}{2} \\ + & 1 \end{cases}$$

$$1 - \cos^2 2x + 3\,\frac{1+\cos 2x}{2} - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 2x + 3 + 3\cos 2x - 6 = 0 \qquad \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos 2x = 1$$

$$2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0 \qquad 2x = \pm 60^\circ + K360^\circ \quad \vee \quad 2x = K360^\circ$$

$$x = \pm 30^\circ + K180^\circ \qquad x = K180^\circ$$

$$\sin^2 x + \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

$$4\sin^2 x + 4\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$(3-\sqrt{3})\sin^2 x + 4\sin x\cos x - (1+\sqrt{3})\cos^2 x = 0$$

$$(3-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{tg}\,x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4 + 3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3 = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$$

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{-2 \pm (\sqrt{3}+1)}{3-\sqrt{3}} = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{3}-3}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{-3\sqrt{3}-9-3-3\sqrt{3}}{6} = -2-\sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}-3+3-\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,x = -(2+\sqrt{3}) \quad \vee \quad \mathrm{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -75^\circ + K180^\circ \quad \vee \quad x = 30^\circ + K180^\circ$$

$$3\cos^2 x + \sin^2 2x = \frac{5}{2}$$

$$6\cos^2 x + 2(2\sin x\cos x)^2 - 5 = 0$$

$$6\cos^2 x + 8\sin^2 x\cos^2 x - 5 = 0$$

$$6\cos^2 x + 8\cos^2 x - 8\cos^4 x - 5 = 0$$

$$-8\cos^4 x + 14\cos^2 x - 5 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 49 - 40 = 9 \qquad \cos^2 x = \frac{-7 \pm 3}{-8} = \begin{cases} \dfrac{10}{8} = \dfrac{5}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\cos^2 x = \frac{5}{4}$ impossibile $\quad \vee \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$x = \pm 45^\circ + K180^\circ$$

$$3\,tg^2\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}\sin x}{1+\cos x} \qquad \cos x \neq -1 \qquad x \neq 180^\circ + K360^\circ$$

$$3\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{\sqrt{3}\sin x}{1+\cos x}$$

$$3-3\cos x-\sqrt{3}\sin x = 0$$

$X = \cos x$

$Y = \sin x$

$$\begin{cases} 3-3X-\sqrt{3}Y=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y=-\sqrt{3}X+\sqrt{3} \\ X^2+3X^2-6X+3-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y=-\sqrt{3}X+\sqrt{3} \\ 4X^2-6X+2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y=-\sqrt{3}X+\sqrt{3} \\ 2X^2-3X+1=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} X_1=\frac{1}{2} \\ Y_1=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} X_2=1 \\ Y_2=0 \end{cases}$$

$$X_{1,2} = \frac{3\pm 1}{4} = \begin{cases} - & \frac{1}{2} \\ + & 1 \end{cases} \qquad x = 60^\circ + K360^\circ \quad \vee \quad x = K360^\circ$$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \operatorname{cotg} x - 2 \qquad \cos x \neq 1 \qquad x \neq k\,360^\circ$$

$$\sin x \neq 0 \qquad x \neq k\,180^\circ$$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} - 2$$

$$\frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{\cos x - 2\sin x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x = \cos x - 2\sin x - \cos^2 x + 2\sin x\cos x$$

$$(1+\cos x)\cancel{(1-\cos x)} = (\cos x - 2\sin x)\cancel{(1-\cos x)}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \qquad x = -30^\circ + k\,360^\circ \qquad \checkmark \qquad x = 210^\circ + k\,360^\circ$$

Disequazioni goniometriche

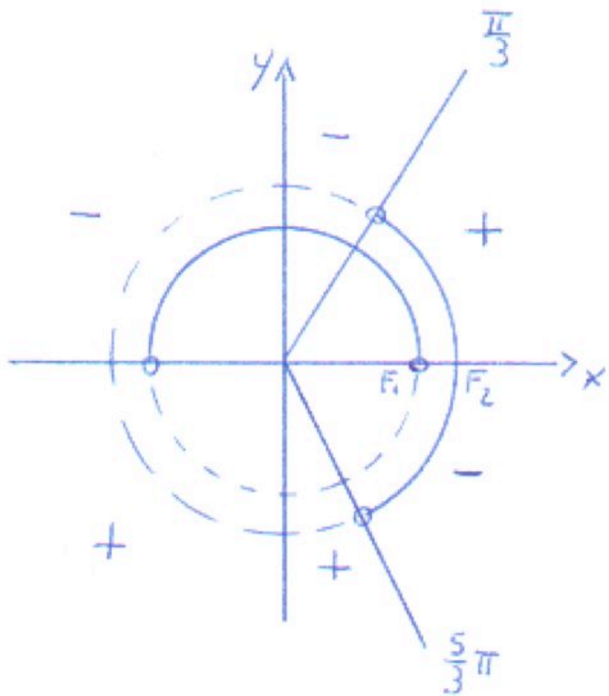
$\sin x\,(2\cos x - 1) > 0$

F_1: $\sin x > 0$

F_2: $2\cos x - 1 > 0 \rightarrow \cos x > \frac{1}{2}$

S: $2K\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2K\pi$ v

$\pi + 2K\pi < x < \frac{5}{3}\pi + 2K\pi$

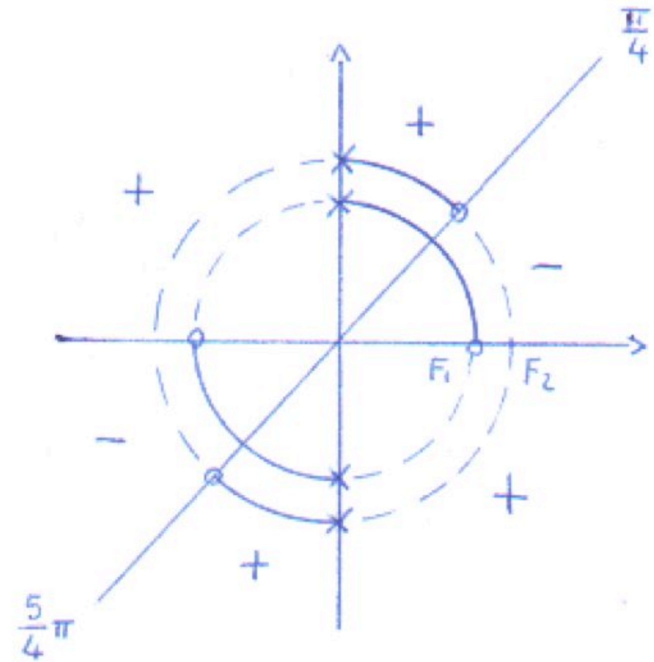


$$\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x-1)<0$$

F_1: $\operatorname{tg}x>0$

F_2: $\operatorname{tg}x>1$

S: $k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi$



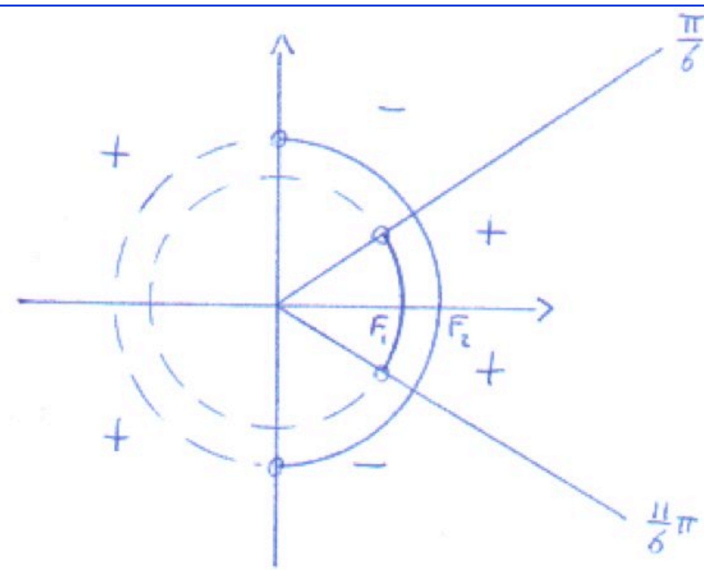
$$(2\cos x-\sqrt{3})\cos x<0$$

F_1: $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$

F_2: $\cos x>0$

S: $\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ✓

$\frac{3}{2}\pi+2k\pi<x<\frac{11}{6}\pi+2k\pi$



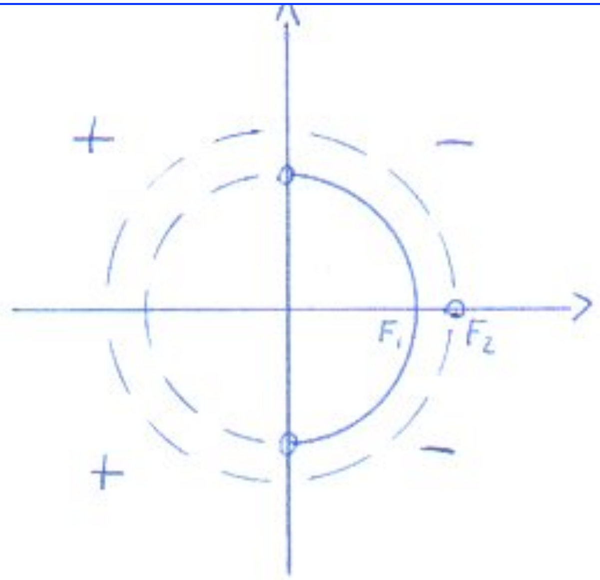
$$\cos^2 x \leqslant \cos x$$

$$\cos x\,(\cos x - 1) \leqslant 0$$

F_1: $\cos x > 0$

F_2: $\cos x > 1$

S: $-\frac{\pi}{2} + 2K\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

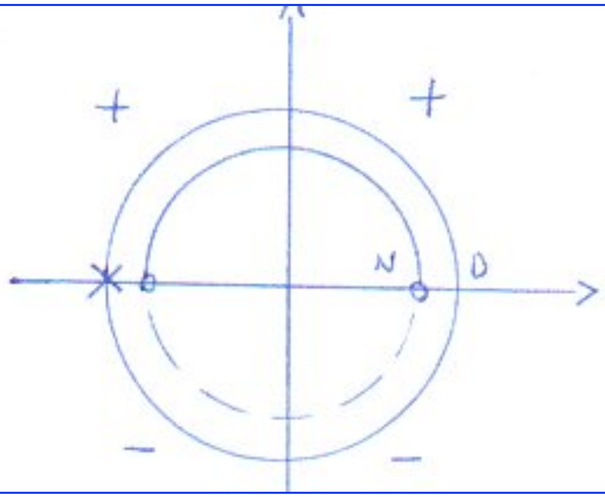


$$\frac{\sin x}{\cos x + 1} \geqslant 0$$

N: $\sin x > 0$

D: $\cos x > -1$

S: $2K\pi \leqslant x < \pi + 2K\pi$



$$\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}<0$$

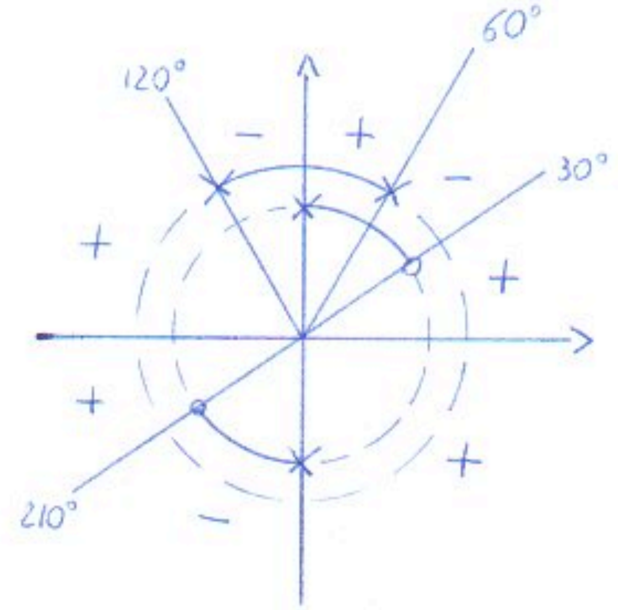
N: $\mathrm{tg}\,x > \frac{\sqrt{3}}{3}$

D: $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

S: $30^\circ + K\,360^\circ < x < 60^\circ + K\,360^\circ$ ✓

$90^\circ + K\,360^\circ < x < 120^\circ + K\,360^\circ$ ✓

$210^\circ + K\,360^\circ < x < 270^\circ + K\,360^\circ$

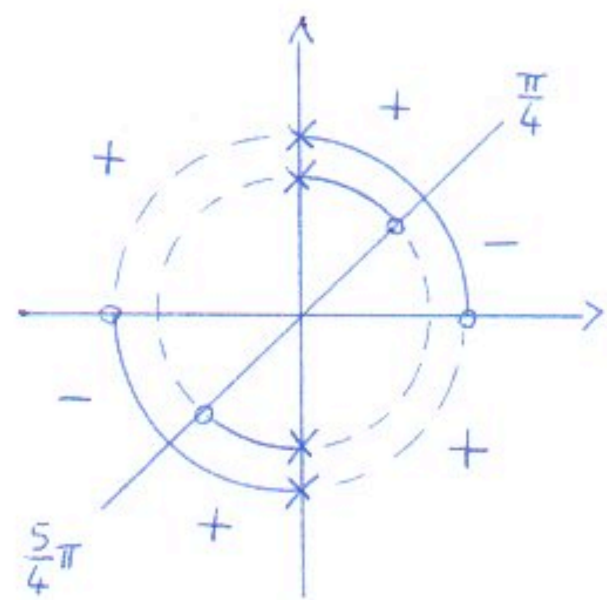


$$\frac{\mathrm{tg}\,x-1}{\mathrm{tg}\,x}<0$$

N: $\mathrm{tg}\,x > 1$

D: $\mathrm{tg}\,x > 0$

S: $K\pi < x < \frac{\pi}{4} + K\pi$



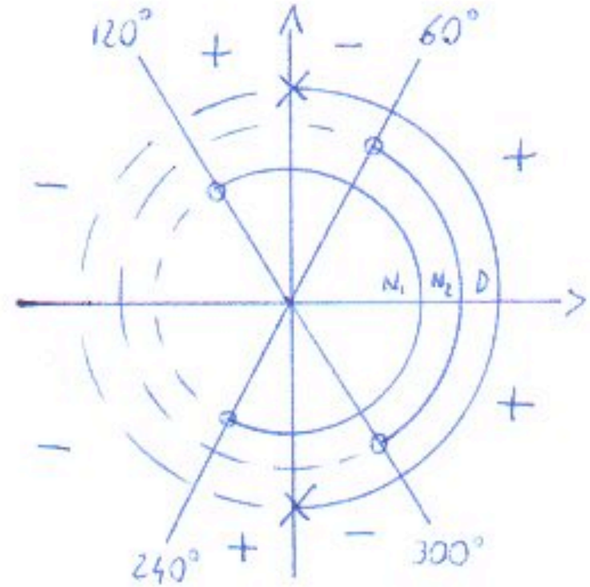
$$\frac{4\cos^2 x - 1}{\cos x} < 0$$

$$\frac{(2\cos x + 1)(2\cos x - 1)}{\cos x} < 0$$

$N_1 \qquad \cos x > -\frac{1}{2}$

$N_2 \qquad \cos x > \frac{1}{2}$

$D \qquad \cos x > 0$



$S: \qquad 60^\circ + K360^\circ < x < 90^\circ + K360^\circ$ ✓

$\qquad 120^\circ + K360^\circ < x < 240^\circ + K360^\circ$ ✓

$\qquad 270^\circ + K360^\circ < x < 300^\circ + K360^\circ$

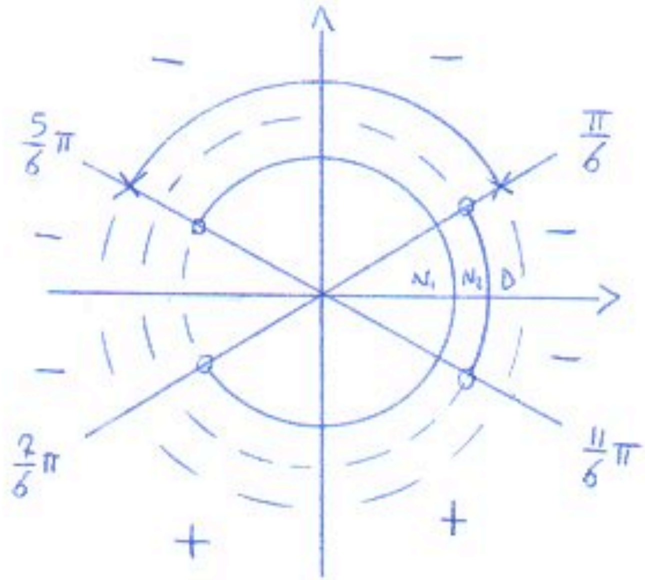
$$\frac{4\cos^2 x - 3}{2\sin x - 1} > 0$$

$$\frac{(2\cos x + \sqrt{3})(2\cos x - \sqrt{3})}{2\sin x - 1} > 0$$

$N_1 \qquad \cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$N_2 \qquad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$D \qquad \sin x > \frac{1}{2}$



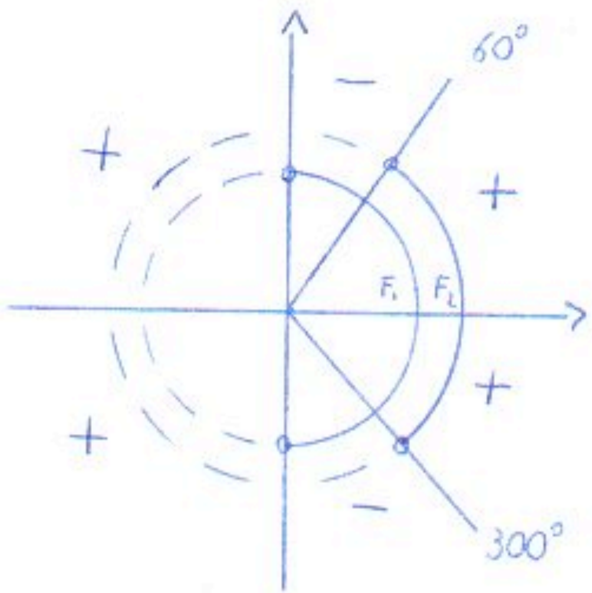
$$S: \quad \frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$$

$$2\cos^2 x - \cos x < 0$$

$$\cos x\,(2\cos x - 1) < 0$$

F_1 $\qquad \cos x > 0$

F_2 $\qquad \cos x > \frac{1}{2}$



$S:$ $\qquad 60^\circ + K360^\circ < x < 90^\circ + K360^\circ \quad \vee$

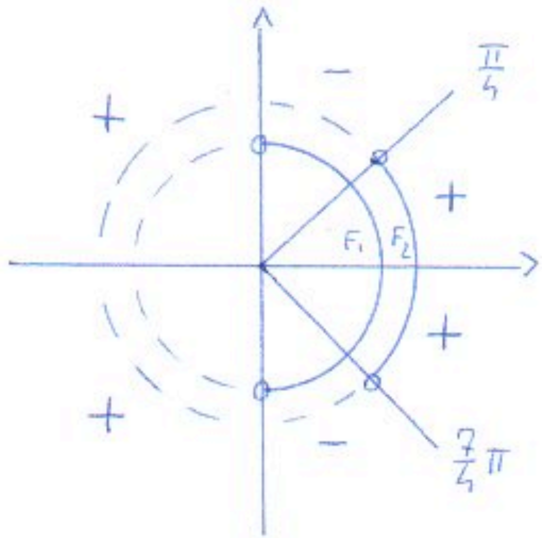
$\qquad 270^\circ + K360^\circ < x < 300^\circ + K360^\circ$

$$2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x < 0$$

$$2\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) < 0$$

F_1 $\qquad \cos x > 0$

F_2 $\qquad \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S:$ $\qquad \frac{\pi}{4} + 2K\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2K\pi \quad \vee$

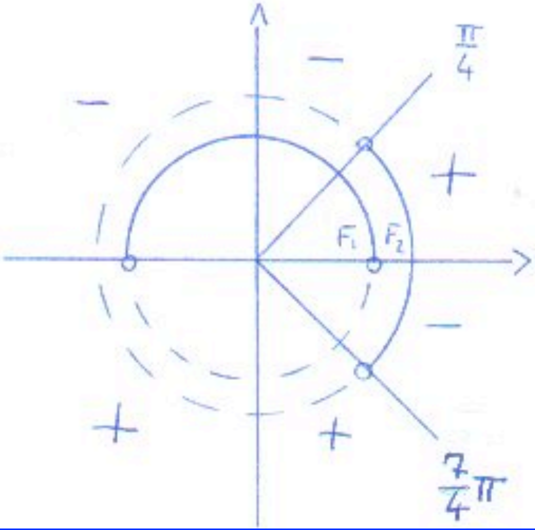
$\qquad \frac{3}{2}\pi + 2K\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2K\pi$

$$\sqrt{2}\cos x \sin x - \sin x < 0$$

$$\sin x \left(\sqrt{2}\cos x - 1\right) < 0$$

F_1 $\quad \sin x > 0$

F_2 $\quad \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$



$S:$ $\quad \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad \vee$

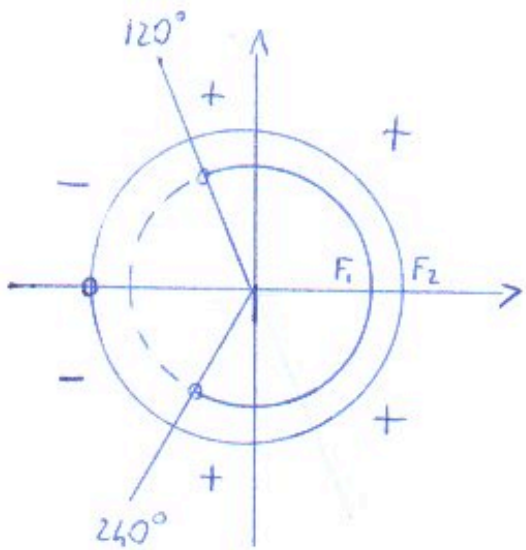
$\frac{7}{4}\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

$$2\cos^2 x + 3\cos x + 1 > 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x + 1) > 0$$

F_1 $\quad \cos x > -\frac{1}{2}$

F_2 $\quad \cos x > -1$



$S:$ $\quad 2k\pi \leq x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \vee$

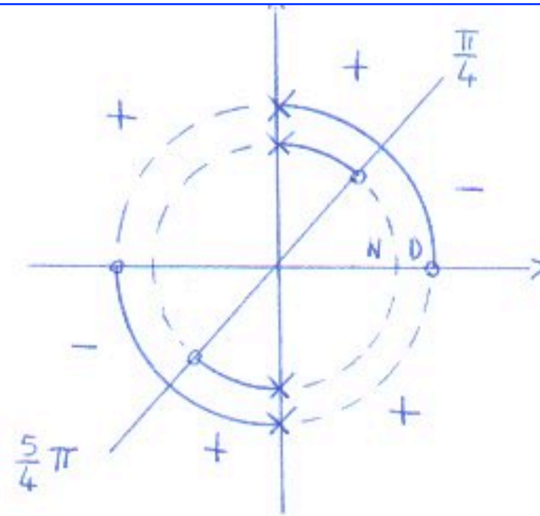
$\frac{4}{3}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$

$$1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x} < 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x} < 0$$

$N: \quad \operatorname{tg} x > 1$

$D: \quad \operatorname{tg} x > 0$

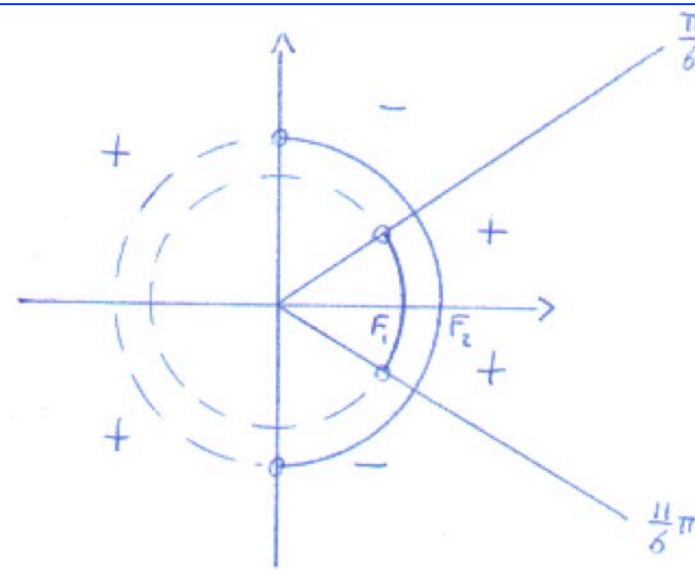


$S: \quad K\pi < x < \frac{\pi}{4} + K\pi$

$$\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\cos x < 0$$

$F_1: \quad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_2: \quad \cos x > 0$



$S: \quad \frac{\pi}{6} + 2K\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2K\pi$ ✓

$\frac{3}{2}\pi + 2K\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2K\pi$

$$3\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x < 3\sin x-\sqrt{3}\cos x$$

$$\cos x\,(3\sin x-\sqrt{3}\cos x)-(3\sin x-\sqrt{3}\cos x)<0$$

$$(\cos x-1)(3\sin x-\sqrt{3}\cos x)<0$$

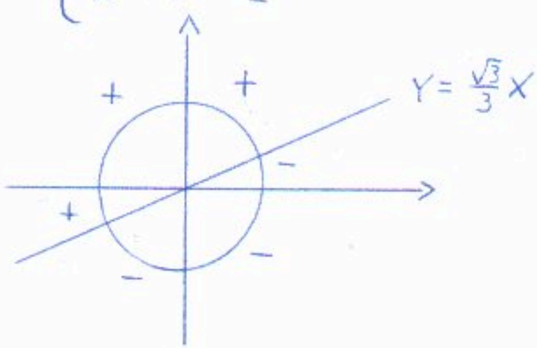
$$(1-\cos x)(3\sin x-\sqrt{3}\cos x)>0$$

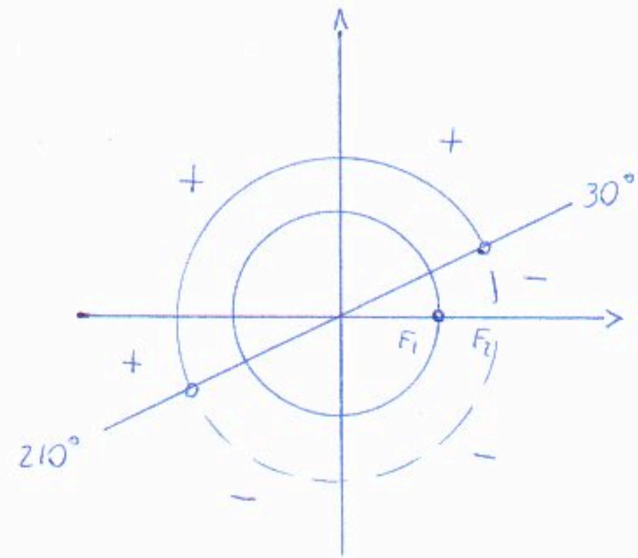
F_1 : $1-\cos x>0$

$\cos x<1$

F_2 : $3\sin x-\sqrt{3}\cos x>0$

$$\begin{cases} 3Y-\sqrt{3}X>0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$





S :

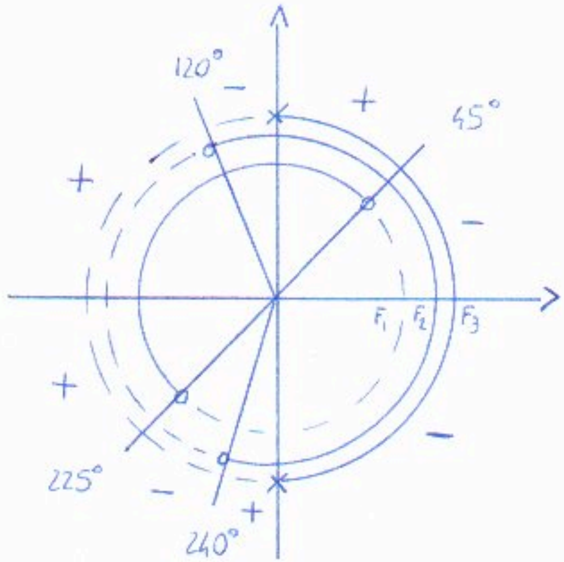
$$\frac{\pi}{6}+2K\pi < X < \frac{7}{6}\pi+2K\pi$$

$$2(\sin x - \cos x) > 1 - \operatorname{tg} x; \qquad 0° < x < 360°$$

$$2(\sin x - \cos x) > \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$$

$$2(\sin x - \cos x) + \frac{\sin x - \cos x}{\cos x} > 0$$

$$\frac{(\sin x - \cos x)(2\cos x + 1)}{\cos x} > 0$$



F_1 : $\sin x - \cos x > 0$

F_2 : $\cos x > -\frac{1}{2}$

D : $\cos x > 0$

S: $45° < x < 90°$ ✓

$120° < x < 225°$ ✓

$240° < x < 270°$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} > 2 - \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{\sin x}{1+\cos x} - 2 + \frac{\cos x}{\sin x} > 0$$

$$\frac{\sin^2 x - 2\sin x - 2\sin x\cos x + \cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)\cdot\sin x} > 0$$

$$\frac{-2\sin x\,(1+\cos x) + 1 + \cos x}{(1+\cos x)\,\sin x} > 0$$

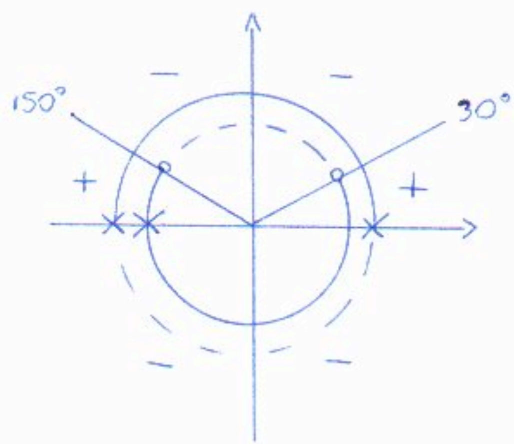
$$\frac{(1+\cos x)(1-2\sin x)}{(1+\cos x)\,\sin x} > 0$$

$\cos x \neq -1 \qquad x \neq 2k\pi + \pi$

$$\frac{1-2\sin x}{\sin x} > 0$$

$F_1 \qquad 1-2\sin x > 0 \qquad \sin x < \frac{1}{2}$

$F_2 \qquad \sin x > 0$



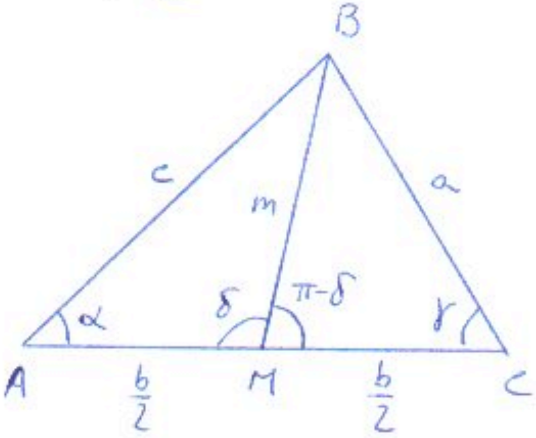
S:

$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee$

$\frac{5}{6}\pi + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$

Trigonometria

Problemi



$\overline{AB} = 13\ cm$

$\overline{BC} = \sqrt{673}\ cm$

$\overline{BM} = 15\ cm$

$\overline{AM} = \overline{MC}$

$\overline{AC} = ?$

$\cos \widehat{BAC} = ?$

$$c^2 = m^2 + \frac{b^2}{4} - mb\cos\delta$$

$$a^2 = m^2 + \frac{b^2}{4} - mb\cos(\pi-\delta) = m^2 + \frac{b^2}{4} + mb\cos\delta$$

$$a^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2} \cancel{- mb\cos\delta} \cancel{+ mb\cos\delta}$$

$$b^2 = 2a^2 + 2c^2 - 4m^2$$

$$b = \sqrt{2a^2+2c^2-4m^2} = \sqrt{2\cdot 673 + 2\cdot 169 - 4\cdot 225}\ cm = \sqrt{784}\ cm = 28\ cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5}{13}$$

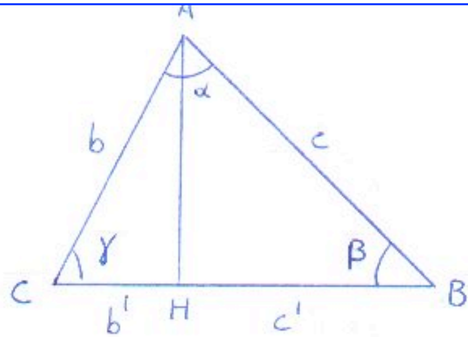
$a = 3 + \sqrt{3}$

$\beta = 45^\circ$

$\gamma = 60^\circ$

$b, c = ?$

$b', c' = ?$



$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma = 75^\circ$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$

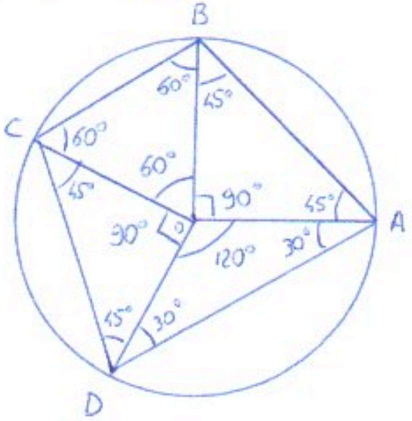
$$b = \frac{(3+\sqrt{3})\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{2\sqrt{2}\,(3+\sqrt{3})}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{2\,(2\sqrt{3}-2)(3+\sqrt{3})}{4}$$

$$b = (\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 3 - 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$b' = b\cos\gamma = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$$c' = c\cos\beta = 3\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 3$$



$\overline{OA} = 1 \text{ cm}$

$\widehat{AOB} = 90°$

$\widehat{BOC} = 60°$

$\widehat{COD} = 90°$

$2p = ?$

$S = ?$

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D} = ?$

$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

$\overline{CD} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{OD}^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$

$\overline{BC} = 2\,\overline{OB} \sin \frac{\widehat{BOC}}{2} = 1 \text{ cm}$

$\overline{AD} = 2\,\overline{OA} \sin \frac{\widehat{AOD}}{2} = \sqrt{3} \text{ cm}$

$2p = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1\right) \text{ cm}$

$S_{OAB} = \frac{1}{2}\,\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin \widehat{AOB} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$

$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

$S_{COD} = \frac{1}{2} \text{ cm}^2$

$S_{DOA} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

$S = S_{OAB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA}$

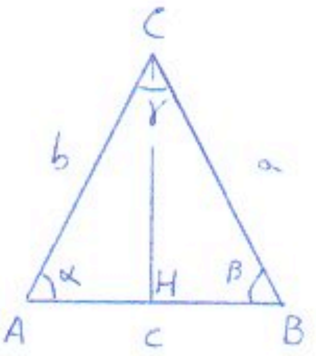
$S = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

$\hat{A} = 30° + 45° = 75°$

$\hat{B} = 60° + 45° = 105°$

$\hat{C} = 60° + 45° = 105°$

$\hat{D} = 45° + 30° = 75°$



$a = b$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\alpha, \beta = ?$

$\gamma = ?$

$$\overline{AH} = \overline{AC} \cos\alpha$$

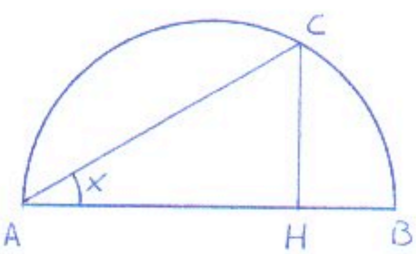
$$\overline{AB} = 2\,\overline{AH} = 2b\cos\alpha$$

$$c = 2b\cos\alpha$$

$$\frac{b}{c} = \frac{b}{2b\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\alpha = 30^\circ \quad \beta = 30^\circ \quad \gamma = 120^\circ$



$\overline{AB} = 2r$

$\widehat{BAC} = x$

$$\frac{\overline{CB} - \overline{HB}}{\overline{AH}} = \frac{1}{3}$$

$$\overline{CB} = 2r\sin x$$

$$\overline{AC} = 2r\cos x$$

$$\overline{AH} = \overline{AC}\cos x = 2r\cos^2 x$$

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 2r\left(1 - \cos^2 x\right)$$

$$\frac{2r\sin x - 2r\left(1 - \cos^2 x\right)}{2r\cos^2 x} = \frac{1}{3}$$

$\cos x \neq 0$

$x \neq 90^\circ + k180^\circ$

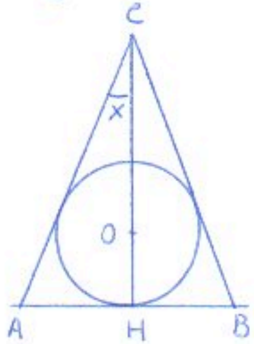
$$3\left(\sin x - \sin^2 x\right) = 1 - \sin^2 x$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} - & \frac{1}{2} \\ + & 1 \end{cases}$$

$x = 30^\circ$

$x = 90^\circ \quad A \equiv C \equiv H$



$\overline{OH} = r$

$\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$2p = ?$

$S = ?$

$\widehat{ACH} = x$

$\overline{AH} = \overline{CH}\ \operatorname{tg} x$

$\overline{AB} = 2\,\overline{CH}\ \operatorname{tg} x$

$\operatorname{tg} x = \dfrac{\overline{AB}}{2\,\overline{CH}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad x = 30^\circ \rightarrow \gamma = 60^\circ \rightarrow \alpha = \beta = 60^\circ$

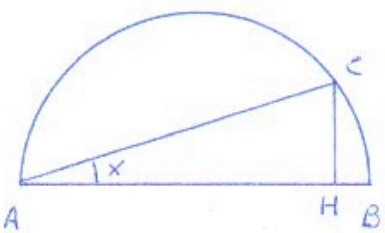
Il triangolo è equilatero

O incentro e baricentro

$\overline{CO} = 2\,\overline{OH} \rightarrow \overline{CH} = 3r \rightarrow \overline{AB} = \dfrac{6r}{\sqrt{3}} = 2r\sqrt{3}$

$2p = 6r\sqrt{3}$

$S = \frac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{CH} = r\sqrt{3}\cdot 3r = 3r^2\sqrt{3}$



$\overline{AB} = 2r$

$\widehat{CAB} = x$

$\dfrac{\overline{CB} + \overline{AH}}{\overline{AB} + \overline{HB}} = \dfrac{11}{10}$

$\overline{CB} = 2r\sin x$

$\overline{AC} = 2r\cos x$

$\overline{AH} = \overline{AC}\cos x = 2r\cos^2 x$

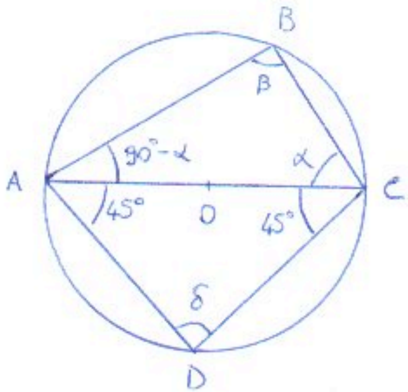
$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = 2r(1-\cos^2 x)$

$\dfrac{\sin x + \cos^2 x}{1 + 1 - \cos^2 x} = \dfrac{11}{10} \rightarrow 10\sin x + 10 - 10\sin^2 x = 11 + 11\sin^2 x$

$21\sin^2 x - 10\sin x + 1 = 0$

$\sin x = \dfrac{5 \pm 2}{21} = \begin{cases} - & \frac{1}{7} \\ + & \frac{1}{3} \end{cases}$ $\qquad x = \arcsin\frac{1}{7}$

$\qquad x = \arcsin\frac{1}{3}$



$\overline{AC} = 2r$

$\widehat{ACB} = \alpha$

$\sin\alpha = \frac{4}{5}$

$\overline{AD} = r\sqrt{2}$

$S = ?$

$2p = ?$

$\alpha_1, \beta, \gamma, \delta = ?$

$\overline{AD} = \overline{AC} \sin \widehat{ACD}$

$r\sqrt{2} = 2r \sin \widehat{ACD} \rightarrow \sin \widehat{ACD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \widehat{ACD} = 45°$

$\beta = \delta = 90°$ $\quad \widehat{DAC} = 45°$ $\quad \widehat{BAC} = 90° - \alpha$

$\overline{AB} = 2r \sin\alpha = \frac{8}{5} r$

$\overline{BC} = 2r\cos\alpha = 2r\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{6}{5} r$

$\overline{DC} = 2r \sin 45° = r\sqrt{2}$

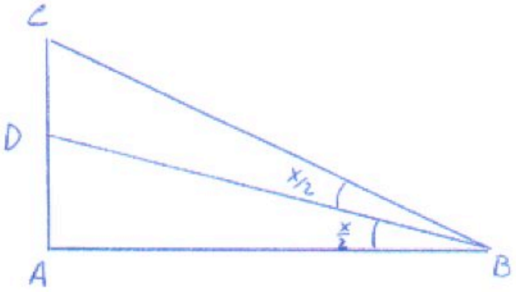
$2p = \frac{8}{5} r + \frac{6}{5} r + r\sqrt{2} + r\sqrt{2} = \frac{2}{5} r \left(7 + 5\sqrt{2}\right)$

$S = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{DC} = \frac{24}{25} r^2 + r^2 = \frac{49}{25} r^2$

$\alpha_1 = \widehat{BAD} = 135° - \alpha$

$\beta = \delta = 90°$

$\gamma = \widehat{BCD} = \alpha + 45°$



$\widehat{BAC} = 90^\circ$

$\overline{BC} = a$

$\widehat{ABC} = x$

$\widehat{ABD} = \widehat{CBD} = \frac{x}{2}$

Dimostrare che $\overline{AD} \cdot \overline{DC} = a^2 \cos x \cdot tg^2 \frac{x}{2}$

$\overline{AD} \cdot \overline{DC} = \frac{3}{20} \overline{BC}^2$

$$\overline{AB} = \overline{BC} \cos x = a \cos x$$

$$\overline{AD} = \overline{AB}\, tg \frac{x}{2} = a \cos x \, tg \frac{x}{2}$$

$$\overline{AC} = \overline{BC} \sin x = a \sin x$$

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = a \sin x - a \cos x \, tg \frac{x}{2}$$

$$t = tg \frac{x}{2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\overline{DC} = a \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot t \right) = a \frac{2t - t + t^3}{1+t^2} = a \frac{t+t^3}{1+t^2} = a \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} = a t$$

$$\overline{DC} = a \, tg \frac{x}{2}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{DC} = a \cos x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot a \operatorname{tg} \frac{x}{2} = a^2 \cos x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{DC} = \frac{3}{20} \overline{BC}^2 \rightarrow \cos x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{3}{20} \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\frac{\cos x - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{3}{20} \qquad \cos x \neq -1$$

$$20 \cos x - 20 \cos^2 x = 3 + 3 \cos x$$

$$20 \cos^2 x - 17 \cos x + 3 = 0 \qquad \Delta = 289 - 240 = 49$$

$$\cos x = \frac{17 \pm 7}{40} = \begin{cases} - & \frac{1}{4} \\ + & \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\cos x = \frac{1}{4} \rightarrow x = \arccos \frac{1}{4}$$

$$\cos x = \frac{3}{5} \rightarrow x = \arccos \frac{3}{5}$$

ABC triangolo

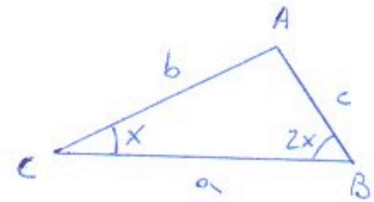
$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$

BH altezza relativa al lato AC

CK " " " " AB

$\widehat{ACB} = x$

$2\overline{BH}^2 + 6\overline{CK}^2 = 5\overline{BC}^2$



$\overline{BH} = a\sin x$

$\overline{CK} = a\sin 2x$

$\overline{BC} = a$

$2a^2\sin^2 x + 6a^2\sin^2 2x = 5a^2$

$2\sin^2 x + 24\sin^2 x\cos^2 x - 5 = 0$

$-24\sin^4 x + 26\sin^2 x - 5 = 0$

$24\sin^4 x - 26\sin^2 x + 5 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 169 - 120 = 49 = 7^2$

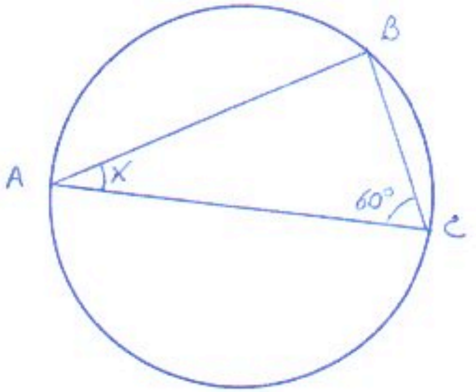
$\sin^2 x = \frac{13 \pm 7}{24} = \begin{cases} - & \frac{1}{4} \\ + & \frac{5}{6} \end{cases}$

$\sin x = \frac{1}{2}$ $x = 30°$ accettabile

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $x = 150°$ non accett.

$\sin x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ $x \approx 65{,}9°$ non accett.

$\sin x = -\sqrt{\frac{5}{6}}$ $x \approx 245{,}9°$ non accett.



$\overline{AB} = r\sqrt{3}$

$\widehat{BAC} = x$

$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 3r^2$

$\overline{AB} = 2r \sin\gamma$

$\sin\gamma = \dfrac{r\sqrt{3}}{2r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\gamma = 60^\circ$

$\beta = 180^\circ - \gamma - x = 120^\circ - x$

$\overline{AC} = 2r \sin\beta = 2r\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \dfrac{1}{2}\sin x\right)$

$\overline{AC} = r\left(\sqrt{3}\cos x + \sin x\right)$

$\overline{BC} = 2r \sin x$

$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 3r^2$

$3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x - 4\sin^2 x = 3$

$6\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 0$

$3\,tg^2 x - \sqrt{3}\,tg\,x = 0$

$3\,tg\,x\left(tg\,x - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = 0$

$tg\,x = 0 \qquad x = 0^\circ$

$tg\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad x = 30^\circ$

Dominio
di una funzione

Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{x^4 - 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$$

Anche in questo caso bisogna porre il denominatore diverso da zero

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 \neq 0$$

Utlizzando la *regola di Ruffini* è possibile scomporre il polinomio di terzo grado nel prodotto dei due fattori

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x - 1)\left(x^2 + 2x - 8\right)$$

(Il secondo fattore potrebbe essere scomposto ancora con il metodo di Ruffini*)*
Il dominio D della funzione si determina ponendo

$$\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ x^2 + 2x - 8 \neq 0 \end{cases}$$

La prima inequazione dà come risultato

$$x \neq 1 \tag{4}$$

Risolviamo l'inequazione $x^2 + 2x - 8 \neq 0$ utilizzando la formula ridotta

$$\frac{\Delta}{4} = 1 + 8 = 9$$

$$x_{1,2} \neq -1 \pm 3$$

da cui

$$x_1 \neq -4 \tag{5}$$

$$x_1 \neq 2 \tag{6}$$

La soluzione formata dalle (4), (5) e (6) fornisce anche il dominio della funzione:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -4 \vee x \neq 1 \vee x \neq 2\}$$

$$D = \mathbb{R} \smallsetminus \{-4, 1, 2\}$$

Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2}}$$

Anche in questo caso, trattandosi di una funzione irrazionale, dovremo porre il radicando maggiore o uguale a zero e studiare la disequazione:

$$\frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \geq 0 \tag{8}$$

si tratta di una *disequazione fratta* da studiare ponendo maggiore o uguale a zero il numeratore (N) e maggiore a zero il denominatore (D) per poi studiare il prodotto dei segni:

$$N \geq 0; \qquad x^2 - 4x \geq 0; \qquad x\,(x-4) \geq 0$$

da cui

$$N_1 \geq 0; \qquad x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; \qquad x - 4 \geq 0; \qquad x \geq 4$$

Studiamo il segno del denominatore:

$$D > 0; \qquad 1 - x^2 > 0; \qquad x^2 - 1 < 0$$

Dall'equazione associata ricaviamo le due soluzione (vedi esercizio precedente) $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$, ma essendo questa volta il verso della disequazione discorde rispetto al coefficiente di x^2 si avrà:

$$-1 < x < 1$$

Ricapitolando

$$N_1 \geq 0; \qquad x \geq 0$$

$$N_2 \geq 0; \qquad x - 4 \geq 0; \qquad x \geq 4$$

$$D > 0; \qquad -1 < x < 1$$

Non essendoci soluzioni di molteplicità *pari* [2] si avrà alternanza di segni negli intervalli individuati dalle soluzioni stesse, ed assumendo la frazione valore *negativo* per $x = -2$, valore minore della soluzione più piccola, si avrà la seguente alternanza dei segni negli intervalli individuati dalle soluzioni:

$$\text{la frazione} \quad \frac{x^2 - 4x}{1 - x^2} \quad \text{assume segno} \quad \begin{cases} - & \text{se } x \in \left]-\infty; -1\right[\\ + & \text{se } x \in \left]-1; 0\right[\\ - & \text{se } x \in \left]0; 1\right[\\ + & \text{se } x \in \left]1; 4\right[\\ - & \text{se } x \in \left]4; +\infty\right[\end{cases}$$

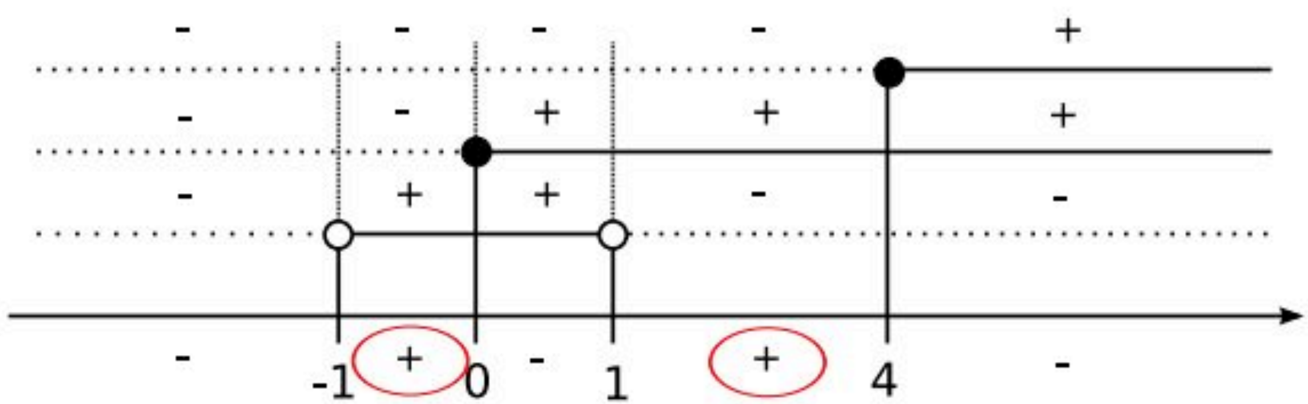
Confrontando i segni degli intervalli con il verso della disequazione (8) si può concludere che il dominio della funzione è:

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 0 \vee 1 < x \leq 4\}$$

$$D =]-1; 0] \cup]1 : 4]$$

essendo $x = 0$ e $x = 4$ inclusi in quanto soluzioni del numeratore.

Verifichiamolo graficamente



Determinare il dominio della funzione

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x - 5} + \sqrt{-x^2 + x + 30}$$

In questo caso abbiamo due radici e un termine frazionario. Le tre condizioni vanno messe a sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x - 5 \neq 0 \\ x^2 - x - 30 \leq 0 \end{cases} \tag{10}$$

Per la seconda radice abbiamo cambiato il segno di tutti i termini e il verso della disequazione. Risolviamo la prima disequazione della (10). Consideriamo l'equazione associata:

$$x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 3$$

da cui si ottengono le **due soluzioni opposte**

$$x = -\sqrt{3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 1\}$$

$$D = [-2; 1]$$

$$x = \sqrt{3}$$

Avendo trovato **due** soluzioni **distinte** il Δ associato è positivo per cui la soluzione della disequazione (10) è data dall'insieme degli *intervalli esterni* rispetto alle due soluzioni ottenute

$$x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \tag{11}$$

L'inequazione $x - 5 \neq 0$ ha soluzione

$$x \neq 5 \tag{12}$$

L'ultima disequazione è di secondo grado *completa* :

$$\Delta = 1 + 120 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = \frac{1 \pm 11}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono:

$$x_1 = \frac{1 - 11}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

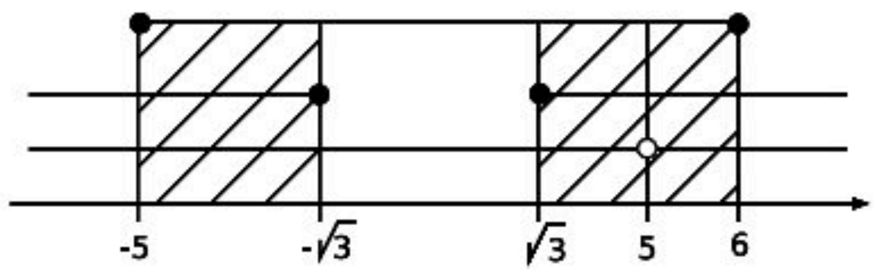
e

$$x_2 = \frac{1 + 11}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

La soluzione della disequazione $x^2 - x - 30 \leq 0$ sarà dunque:

$$-5 \leq x \leq 6 \tag{13}$$

Riportiamo la (10), la 12 e la (13) sul grafico del sistema:



da cui ricaviamo il dominio:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} \leq x \leq 6 \vee x \neq 5 \right\}$$

$$D = \left[-5; -\sqrt{3} \right] \cup \left[\sqrt{3}; 5 \left[\cup \right] 5; 6 \right]$$

$$\boxed{y = \frac{2x^2 + \sqrt{1-x^3}}{x - \sqrt{1-x}}}$$

$$\begin{cases} 1-x^3 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ x - \sqrt{1-x} \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (1-x)\cancel{(1+x+x^2)} \geq 0 \\ x \leq 1 \\ x \neq \sqrt{1-x} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \leq 1 \\ x^2+x-1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} < \begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ non accett.} \\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ accett.} \end{array} \end{cases}$$

$$\boxed{D = \left(-\infty \,;\, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \,;\, 1\right]}$$

$$\boxed{y=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{7x-x^2-1}-1}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+7x-1}-1\geq 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x^2+7x-1}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{0}$$

$$-x^2+7x-1\leq 0$$

$$x^2-7x+1\geq 0$$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$x\leq\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\quad\vee\quad x\geq\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{D=\left(-\infty;\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{7+3\sqrt{5}}{2};+\infty\right)}$$

$$\boxed{y = \frac{\log_a\left(5^{x^2-3x-1} - 5^{x-4}\right)}{x-5} \qquad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}}$$

$$\begin{cases} 5^{x^2-3x-1} - 5^{x-4} > 0 \\ x-5 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5^{x^2-3x-1} > 5^{x-4} \\ x \neq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-3x-1 > x-4 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4x+3 > 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3) > 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \quad \vee \quad x > 3 \\ x \neq 5 \end{cases}$$

$$\boxed{D = (-\infty; 1) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)}$$

$$\boxed{y = \arcsin \frac{3x-1}{x+7}}$$

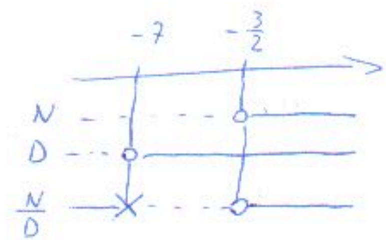
$$\begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+7} \geq -1 \\[2ex] \dfrac{3x-1}{x+7} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+7} + 1 \geq 0 \\[2ex] \dfrac{3x-1}{x+7} - 1 \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-1+x+7}{x+7} \geq 0 \\[2ex] \dfrac{3x-1-x-7}{x+7} \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+6}{x+7} \geq 0 \\[2ex] \dfrac{2x-8}{x+7} \leq 0 \end{cases}$$

prima diseq.

$$\frac{4x+6}{x+7} \geq 0 \rightarrow \frac{2x+3}{x+7} \geq 0$$

$$N > 0 \rightarrow 2x+3 > 0 \rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

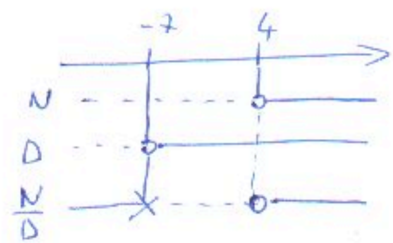
$$D > 0 \rightarrow x+7 > 0 \rightarrow x > -7$$



$$x < -7 \quad \vee \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

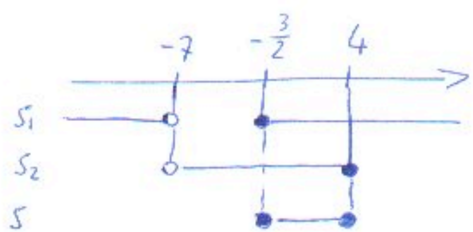
seconda diseq.

$$\frac{2x-8}{x+7} \leq 0 \rightarrow \frac{x-4}{x+7} \leq 0$$



$$-7 < x \leq 4$$

$$\begin{cases} x < -7 \quad \vee \quad x \geq -\frac{3}{2} \\ -7 < x \leq 4 \end{cases}$$



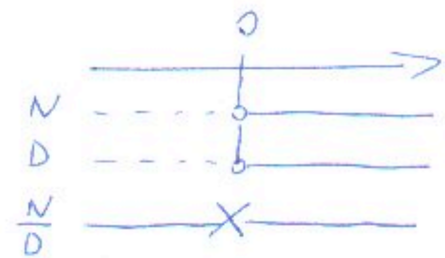
$$\boxed{D = \left[-\frac{3}{2} ; 4\right]}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\log\frac{e^x-1}{x}}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x} > 0 \end{cases}$$

$N>0 \rightarrow e^x-1>0 \rightarrow e^x>e^0 \rightarrow x>0$

$D>0 \rightarrow x>0$



$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \forall x \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{D = \mathbb{R} - \{0\}}$$

$$\boxed{y=\sqrt{\frac{\log^2 x-4}{\log x+1}}}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{\log^2 x-4}{\log x+1}\geq 0 \end{cases}$$

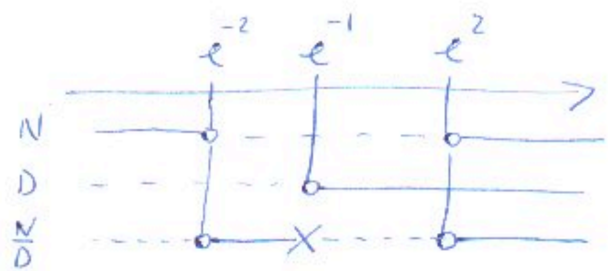
$N>0 \rightarrow \log^2 x-4>0 \rightarrow \log x<-2 \ \vee \ \log x>2$

$x<e^{-2} \ \vee \ x>e^{2}$

$D>0 \rightarrow \log x+1>0$

$\log x>-1$

$x>e^{-1}$

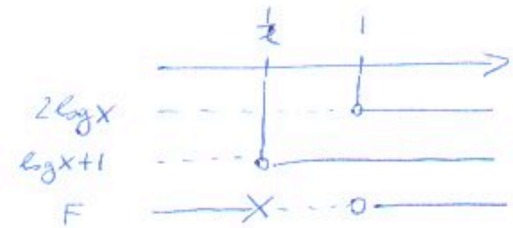


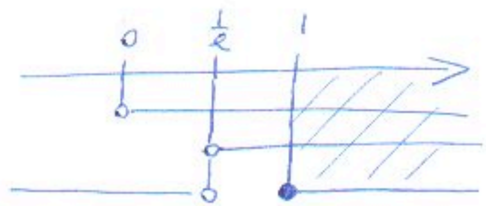
$$\begin{cases} x>0 \\ e^{-2}\leq x<e^{-1} \ \vee \ x\geq e^{2} \end{cases}$$

$$\boxed{D=\left[\frac{1}{e^2};\frac{1}{e}\right)\cup\left[e^2;+\infty\right)}$$

$$\boxed{y = \arcsin \frac{\log x - 1}{\log x + 1}}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\log x - 1}{\log x + 1} \leq 1 \\ \dfrac{\log x - 1}{\log x + 1} \geq -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{-2}{\log x + 1} \leq 0 \\ \dfrac{2 \log x}{\log x + 1} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{2}{\log x + 1} \geq 0 \\ \dfrac{2 \log x}{\log x + 1} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e} \vee x \geq 1 \end{cases}$$



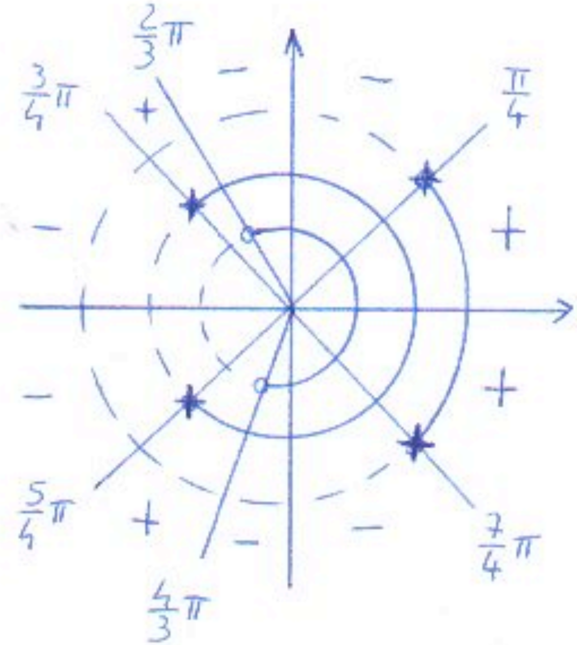


$$\boxed{D = [1; +\infty)}$$

$$y=\sqrt{\frac{2\cos x+1}{2\cos^2 x-1}}\ , \quad x\in[0;2\pi]$$

$$\frac{2\cos x+1}{2\cos^2 x-1}\geqslant 0$$

$$\frac{2\cos x+1}{(\sqrt{2}\cos x+1)(\sqrt{2}\cos x-1)}\geqslant 0$$



$$D=\left[0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left[\frac{2}{3}\pi;\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{4}\pi;\frac{4}{3}\pi\right]\cup\left(\frac{7}{4}\pi;2\pi\right]$$

Studio
di una funzione

$$y = 4x^3 + 2x^2$$

dominio:

$D = \mathbb{R}$

simmetrie:

$f(-x) = -4x^3 + 2x^2$

$f(-x) \neq f(x)$ $\quad$ f non è pari

$f(-x) \neq -f(x)$ $\quad$ f non è dispari

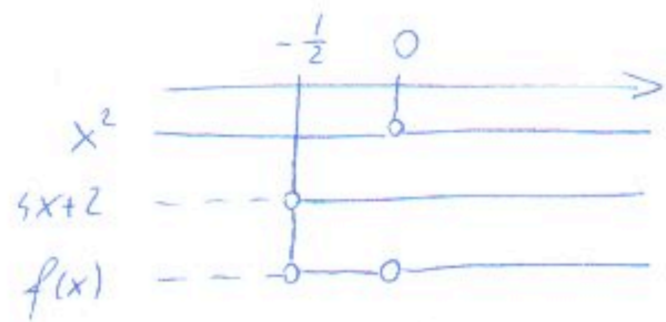
intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad$ $O(0;0)$

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2(4x+2) = 0 \end{cases}$ $\quad$ $A\left(-\frac{1}{2};0\right)$

segno:

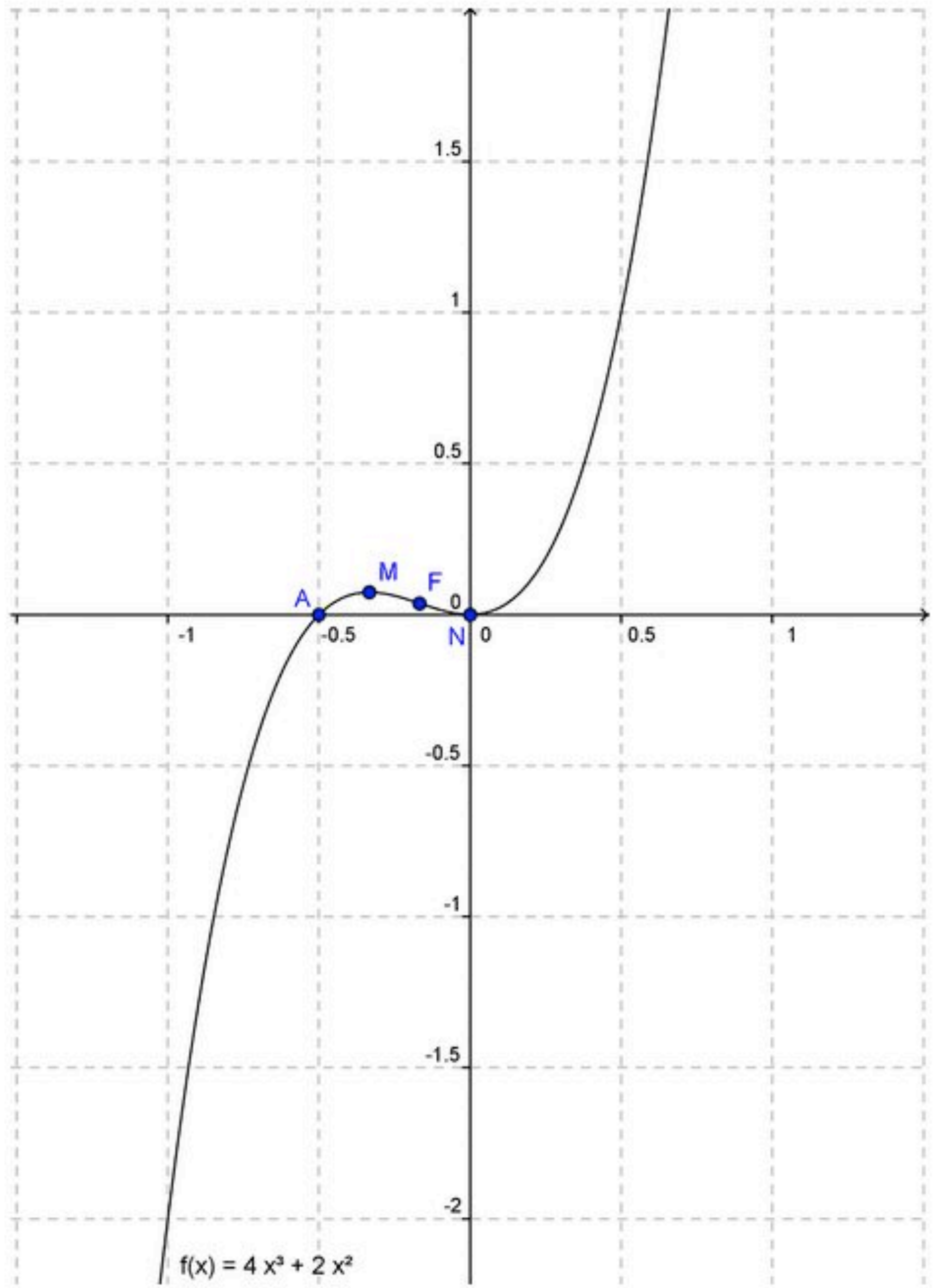
$f(x) > 0 \rightarrow x^2(4x+2) > 0$



$I.P. = \left(-\frac{1}{2};0\right) \cup (0;+\infty)$

$I.N. = \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$

grafico



$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$$

dominio:

$x \neq 0$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$

simmetrie:

$f(-x) = -x - 3 + \frac{4}{x^2}$

f né pari né dispari

intersezioni con gli assi:

$x \neq 0 \rightarrow$ non esistono intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array}$$

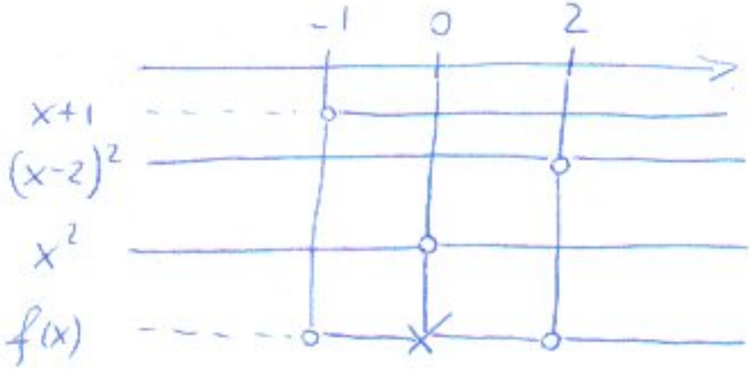
$(x+1)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x+1)(x-2)^2 = 0$

$A(-1;0) \quad B(2;0)$

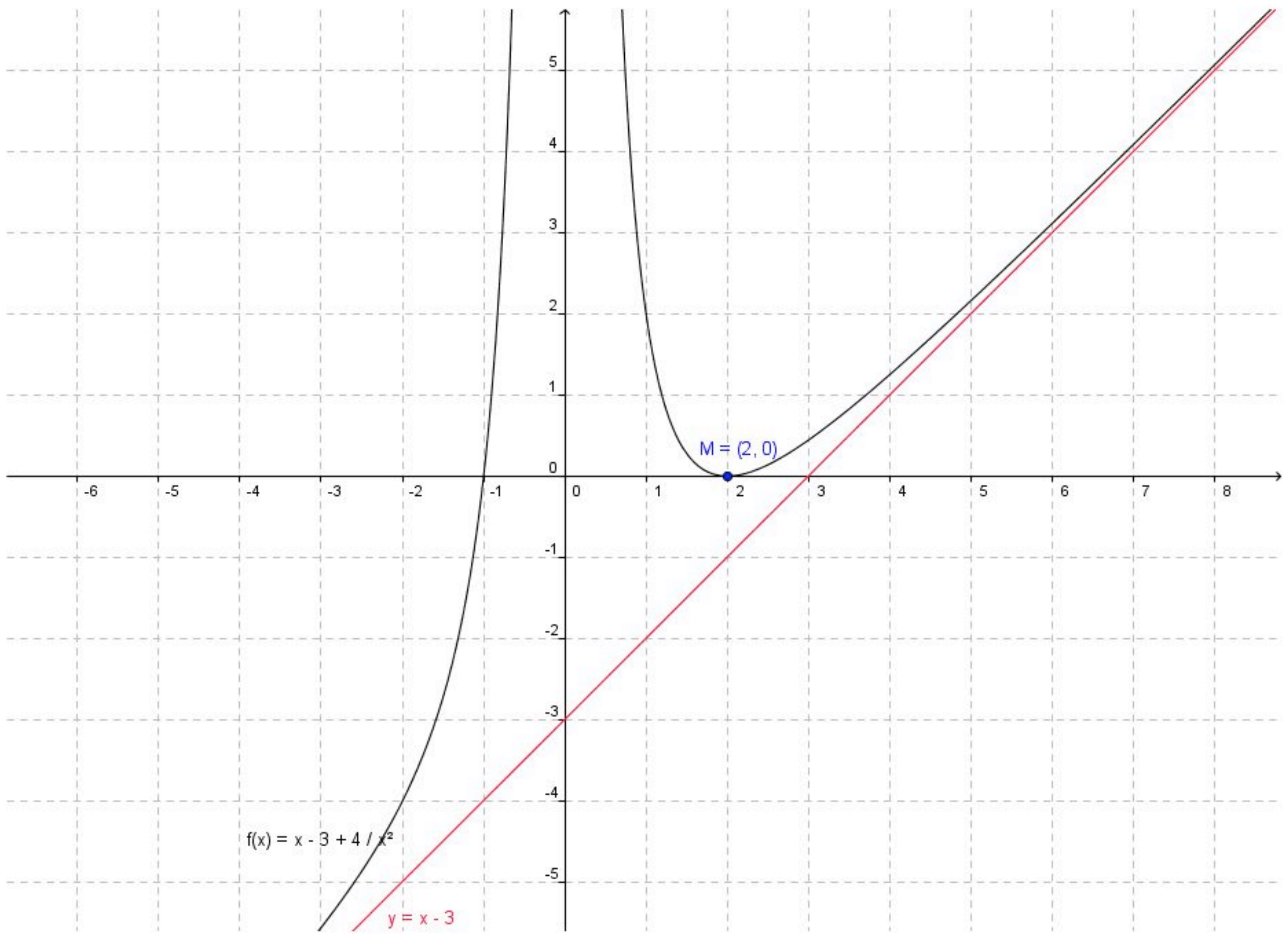
segno:

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{(x+1)(x-2)^2}{x^2} > 0$$



$$I.P. = (-1;0) \cup (0;2) \cup (2;+\infty)$$

$$I.N. = (-\infty;-1)$$


M = (2, 0)
f(x) = x - 3 + 4 / x²
y = x - 3

$$y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

dominio:

$x^2+1>0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$D = \mathbb{R}$

simmetrie:

$$f(-x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

f né pari né dispari

intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \qquad A(0;-1)$$

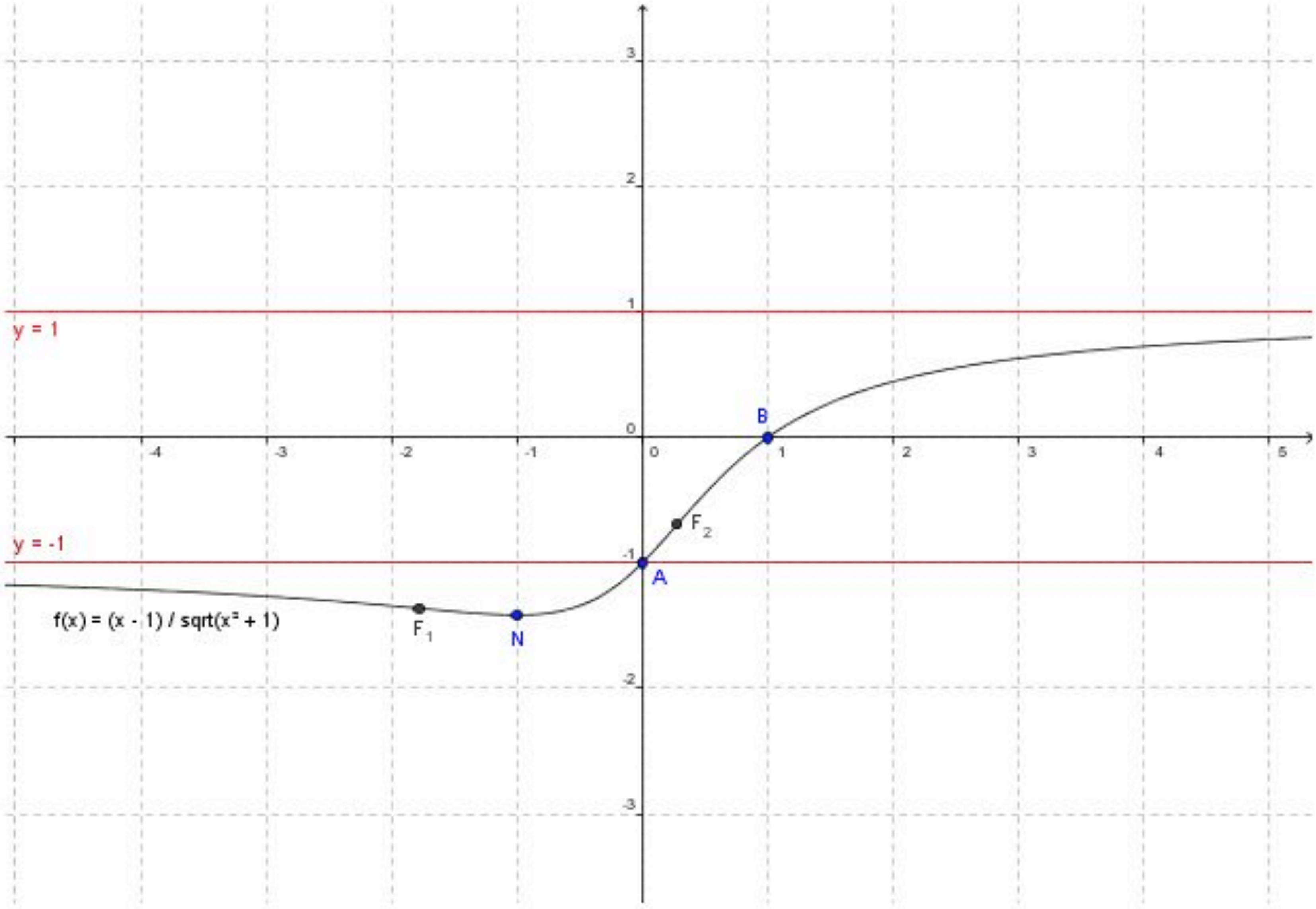
$$\begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \qquad B(1;0)$$

segno:

$$f(x)>0 \rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}>0 \rightarrow x>1$$

$I.P. = (1;+\infty)$

$I.N. = (-\infty;1)$



y = 1
y = -1
f(x) = (x - 1) / sqrt(x² + 1)
B
A
N
F1
F2

$$\boxed{y = \sqrt{1 - e^x}}$$

dominio:

$1 - e^x \geq 0$

$e^x \leq 1 \rightarrow e^x \leq e^0 \rightarrow x \leq 0$

$D = (-\infty ; 0]$

intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad O(0;0)$

$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{1-e^x} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

segno:

$f(x) > 0 \rightarrow \sqrt{1-e^x} > 0$

$I.P. = (-\infty ; 0)$

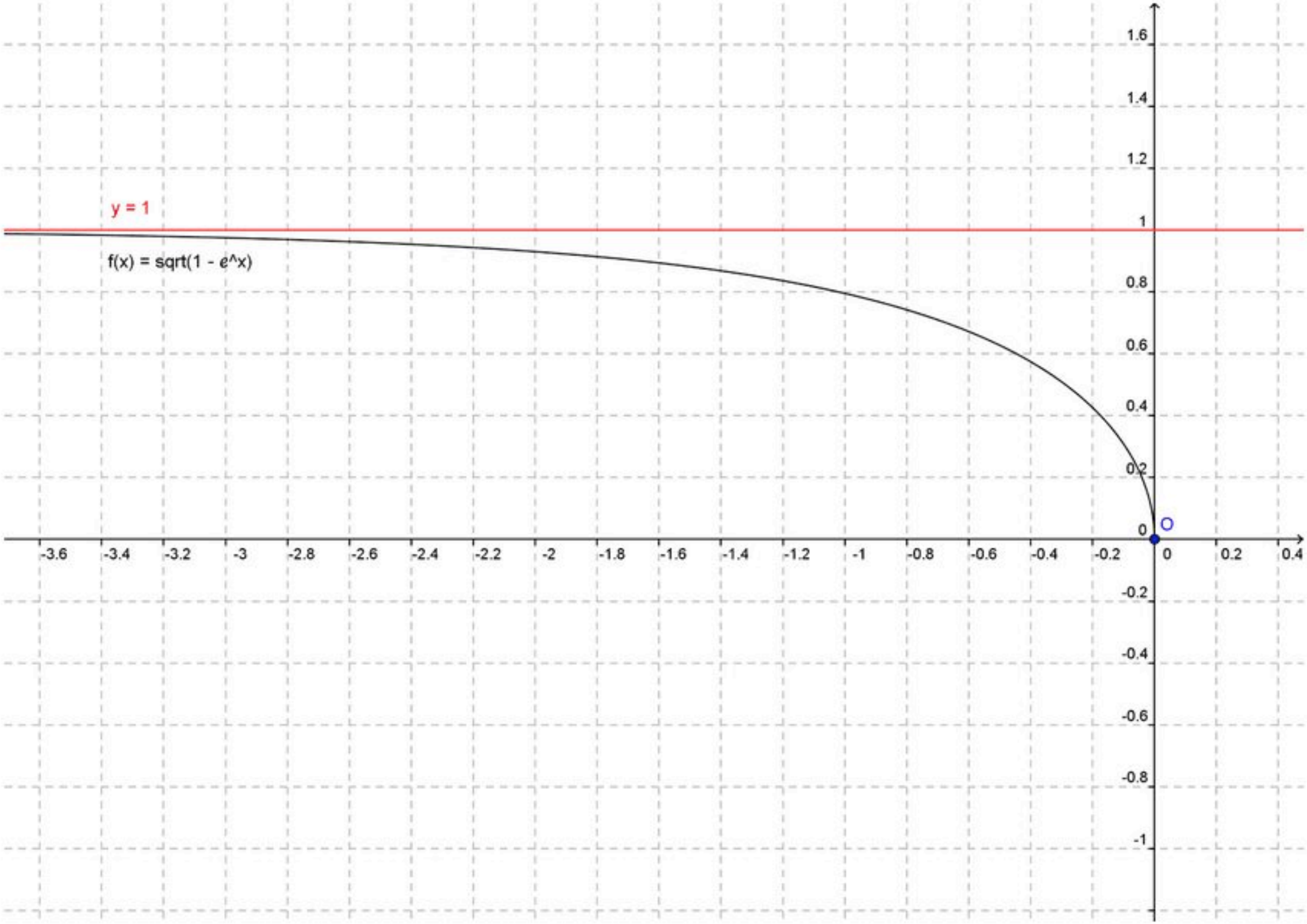
$I.N. = \phi$

asintoti:

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{1-e^x} = 1$

$y = 1$ asintoto orizzontale sinistro



y = 1
f(x) = sqrt(1 - e^x)
O
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-3.6
-3.4
-3.2
-3
-2.8
-2.6
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4

$$y = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

dominio:

$e^x - 1 \neq 0 \rightarrow e^x \neq 1 \rightarrow x \neq 0$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$

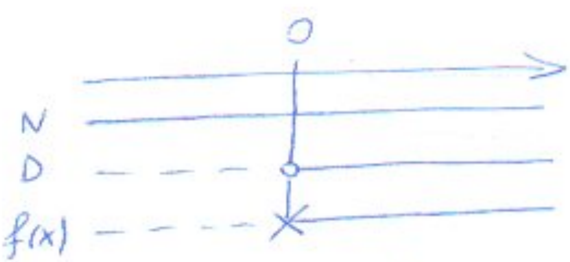
simmetrie

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1}$$

f né pari né dispari

segno:

$$f(x) > 0 \rightarrow \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$



$I.P. = (0; +\infty)$

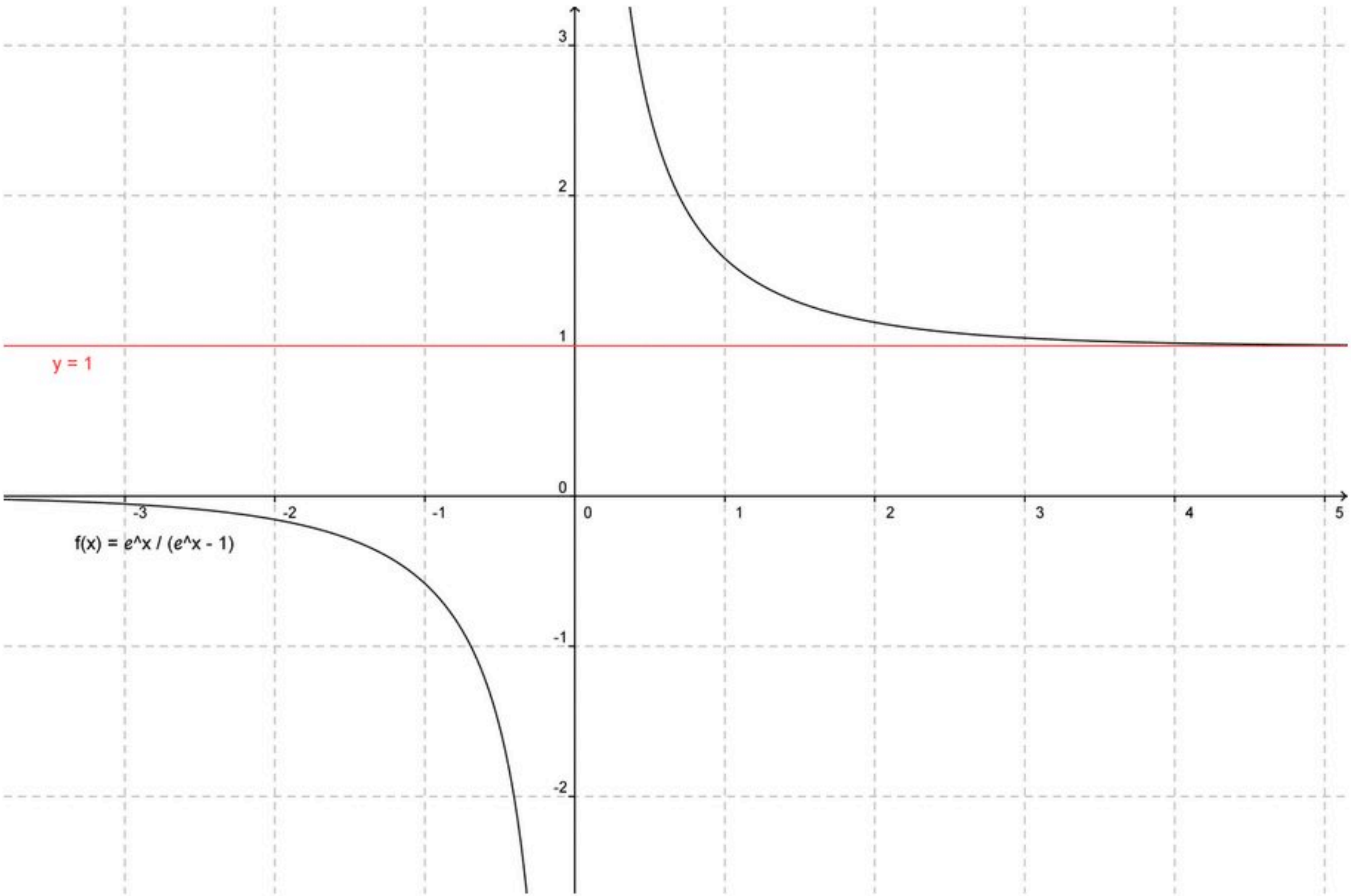
$I.N. = (-\infty; 0)$

intersezioni con gli assi:

$0 \notin D$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \end{cases} \rightarrow \emptyset$$

Non ci sono intersezioni con gli assi



y = 1
f(x) = e^x / (e^x - 1)

$$y = \frac{1}{x}\log^2 x$$

dominio:

$x>0$

$D=(0;+\infty)$

intersezioni con gli assi:

$0 \notin D$

$$\begin{cases} y=0 \\ \frac{1}{x}\log^2 x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

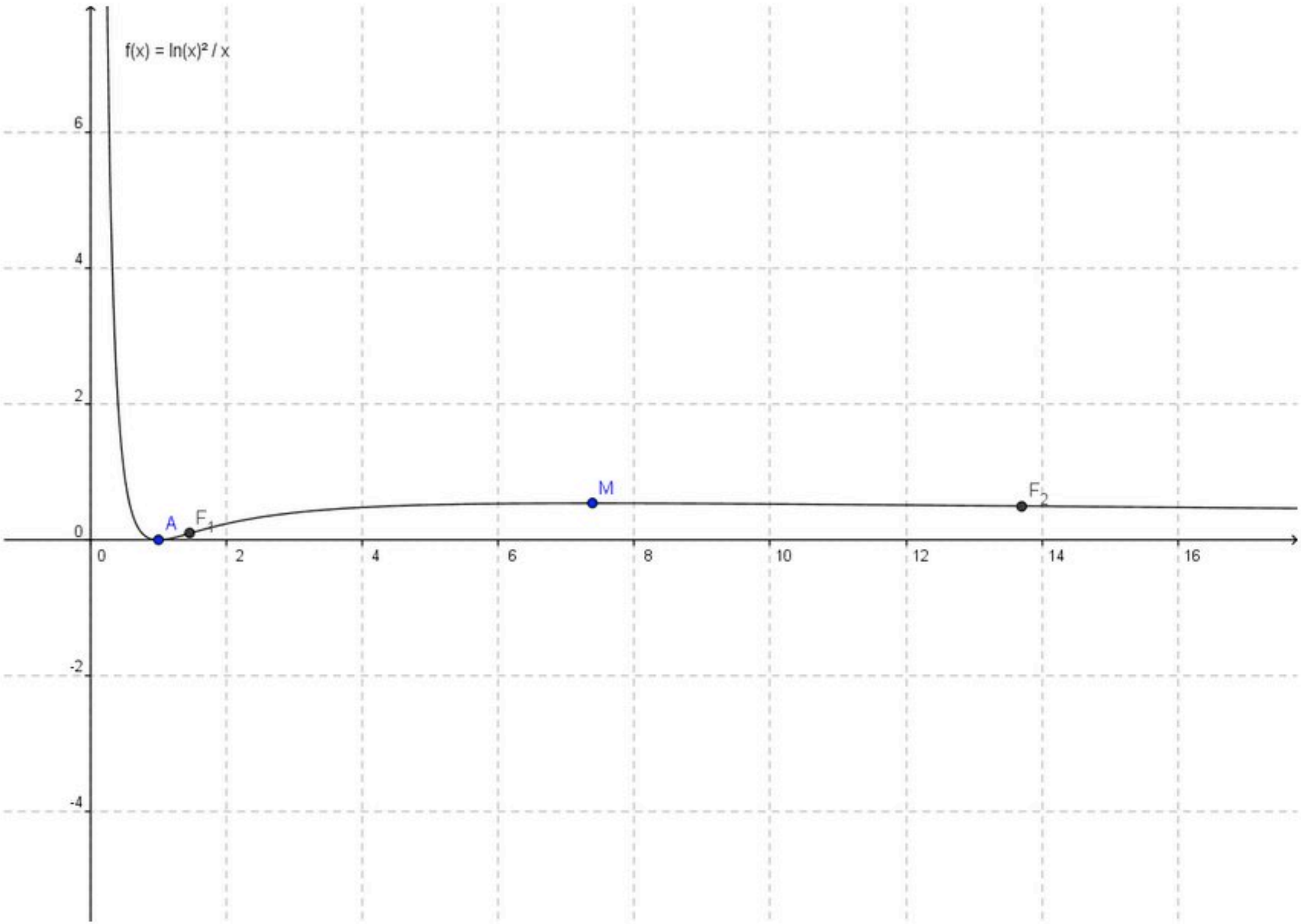
$A(1;0)$

segno:

$f(x)>0 \rightarrow \frac{\log^2 x}{x}>0$

$I.P. = (0;+1)\cup(+1;+\infty)$

$I.N. = \emptyset$



f(x) = ln(x)² / x
6
4
2
0
-2
-4
0
2
4
6
8
10
12
14
16
A
F1
M
F2

$$y = \log\left|x^2 - 5x + 4\right|$$

dominio:

$$x^2 - 5x + 4 \neq 0$$

$$(x-4)(x-1) \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{1; 4\}$$

intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \log 4 \end{cases} \qquad A(0; \log 4)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \log\left|x^2 - 5x + 4\right| = 0 \end{cases}$$

$$\left|x^2 - 5x + 4\right| = 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 1 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 4 = -1$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 5x + 5 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} \sim 0{,}697 \\ \sim 4{,}30 \end{cases} \quad \vee \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \sim 1{,}38 \\ \sim 3{,}62 \end{cases}$$

$$B\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{2}; 0\right) \qquad E\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 0\right)$$

$$C\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; 0\right) \qquad F\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; 0\right)$$

segno:

$f(x) > 0$

$\log|x^2-5x+4| > \log 1$

$|x^2-5x+4| > 1$

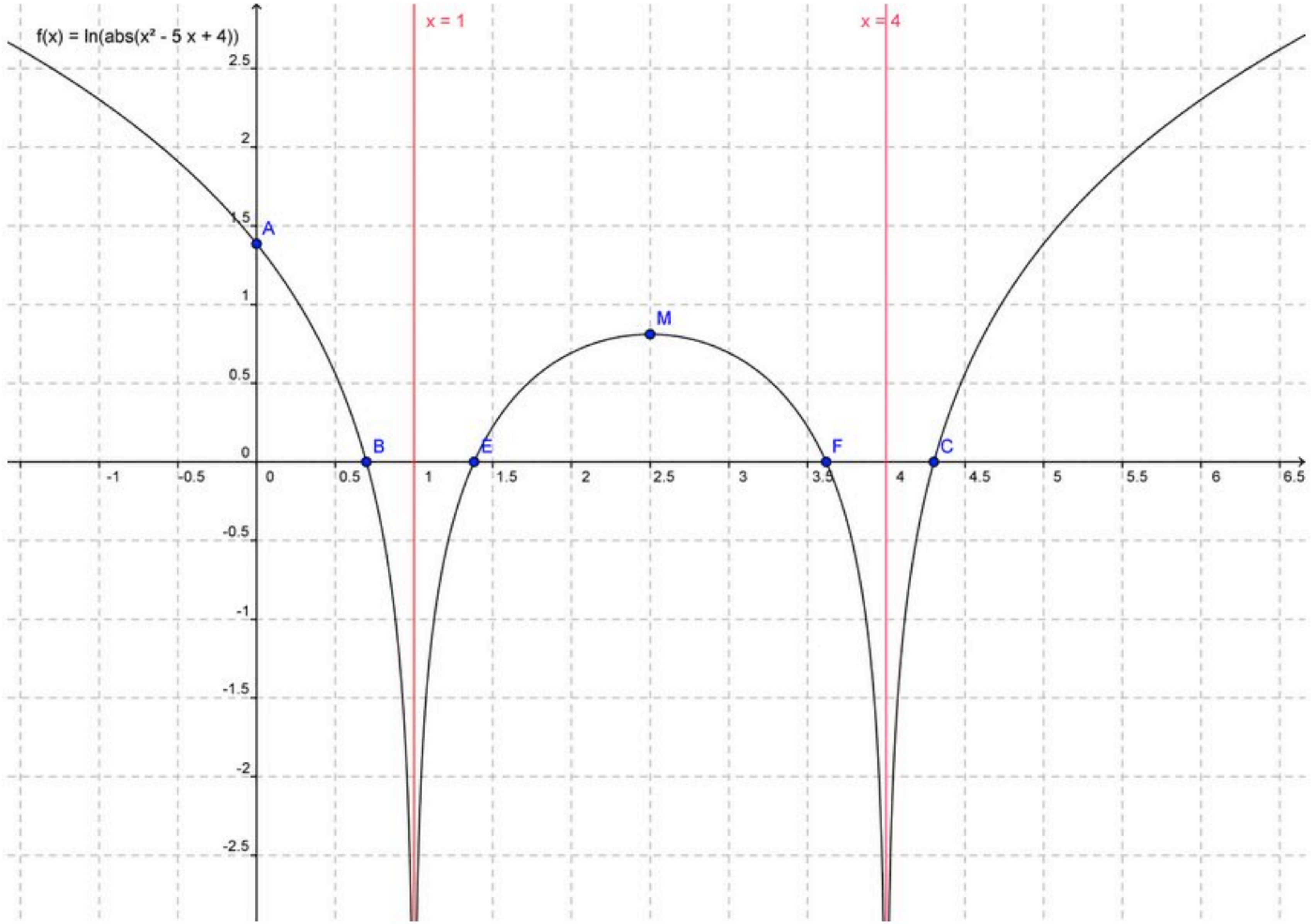
$x^2-5x+4 < -1 \quad \vee \quad x^2-5x+4 > 1$

$x^2-5x+5 < 0 \quad \vee \quad x^2-5x+3 > 0$

$\frac{5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x < \frac{5-\sqrt{13}}{2} \ \vee \ x > \frac{5+\sqrt{13}}{2}$

$I.P. = \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

$I.N. = \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; 4\right) \cup \left(4; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$



f(x) = ln(abs(x² - 5 x + 4))
x = 1
x = 4
A
B
E
M
F
C

$$y = 2senx - sen2x$$

dominio:

$D = \mathbb{R}$

simmetrie:

$f(-x) = -2\sin x + \sin 2x = -f(x)$

f è dispari

periodicità:

$y_1 = 2\sin x$ ha periodicità 2π

$y_2 = -\sin 2x$ ha periodicità π

$y = 2\sin x - \sin 2x$ ha periodicità 2π

intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad O(0;0)$$

$$\begin{cases} y=0 \\ 2\sin x-\sin 2x=0 \end{cases}$$

$$2\sin x-2\sin x\cos x=0$$

$$2\sin x\,(1-\cos x)=0$$

$$\sin x=0 \;\rightarrow\; x=k\pi,\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\cos x=1 \;\rightarrow\; x=2k\pi$$

$A(\pi;0)$ $B(2\pi;0)$ $C(3\pi;0)$ etc.

segno:

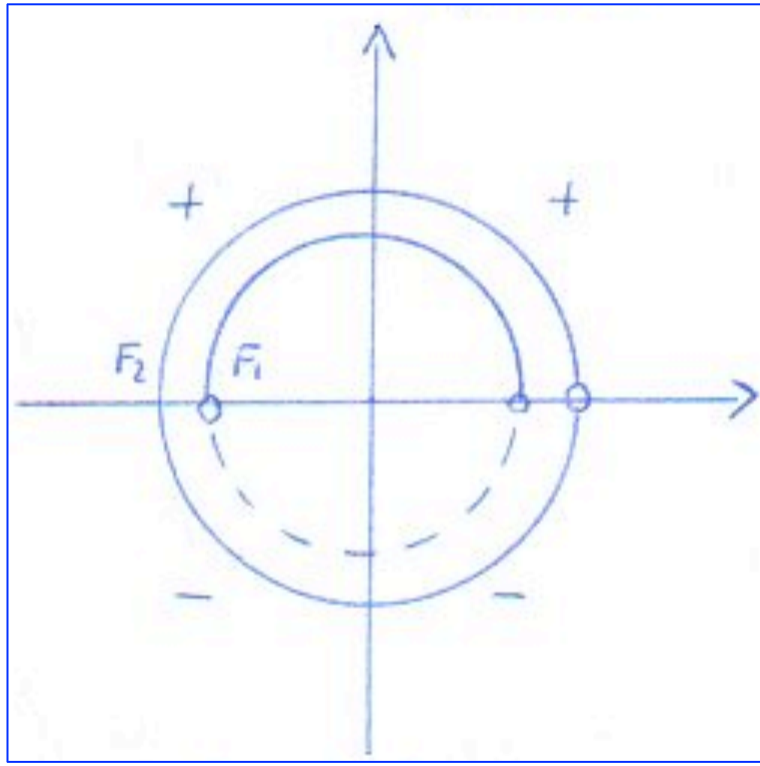
$f(x)>0 \rightarrow 2\sin x\,(1-\cos x)>0$

$F_1>0 \rightarrow 2\sin x>0$

$2K\pi<x<\pi+2K\pi$

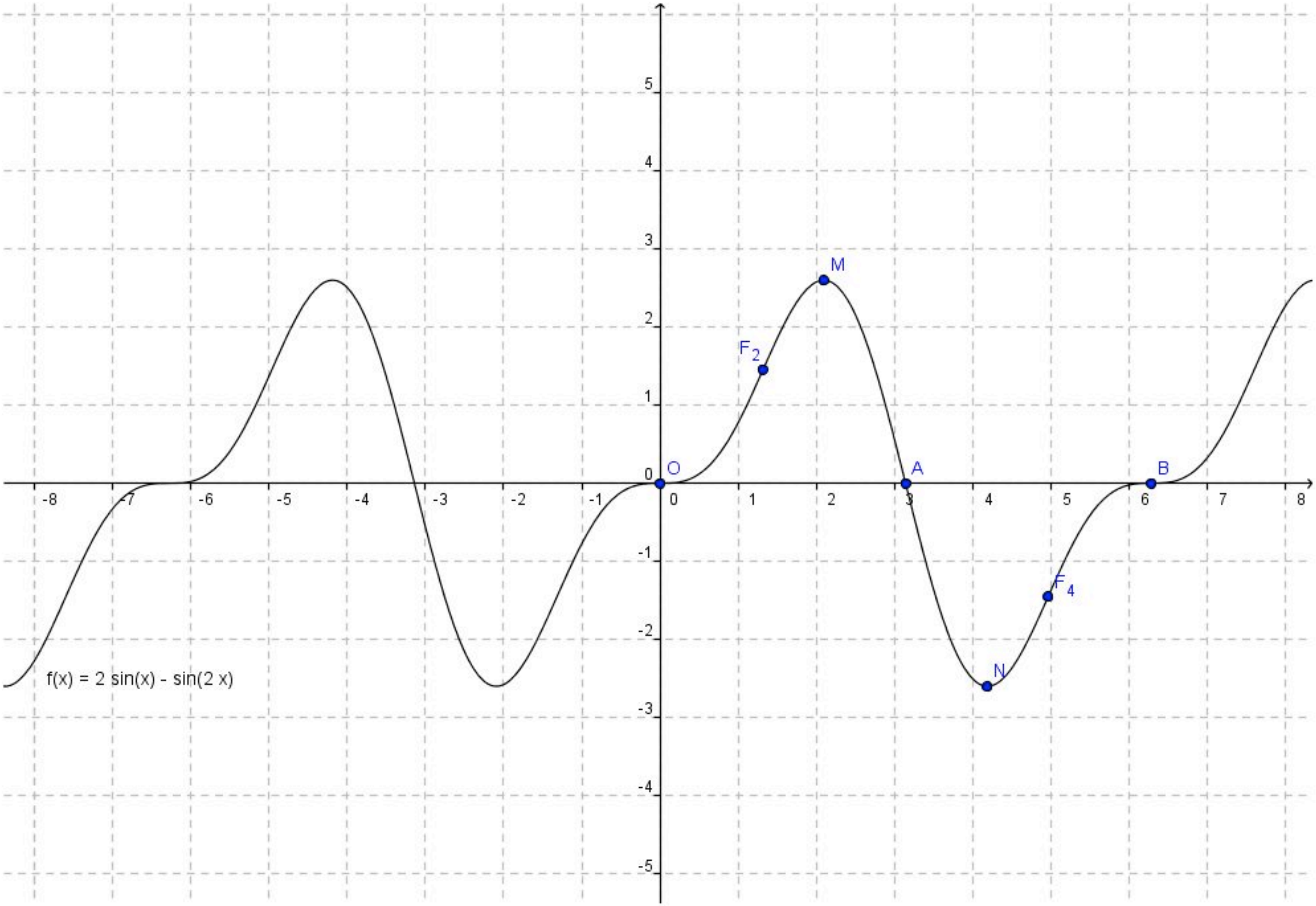
$F_2>0 \rightarrow 1-\cos x>0 \rightarrow \cos x<1$

$x\neq 2K\pi$



$I.P. = \{x\in\mathbb{R} \mid 2K\pi<x<\pi+2K\pi,\ K\in\mathbb{Z}\}$

$I.N. = \{x\in\mathbb{R} \mid \pi+2K\pi<x<2\pi+2K\pi,\ K\in\mathbb{Z}\}$



f(x) = 2 sin(x) - sin(2 x)
M
F2
O
A
B
N
F4

$$y = \frac{\cos x}{1 - \cos x}$$

dominio:

$1 - \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 1$

$x \neq 2K\pi$

$D = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2K\pi ,\ K \in \mathbb{Z} \}$

simmetrie:

$f(-x) = \dfrac{\cos x}{1 - \cos x} = f(x)$

f è pari

periodicità:

$T = 2\pi$

intersezioni con gli assi:

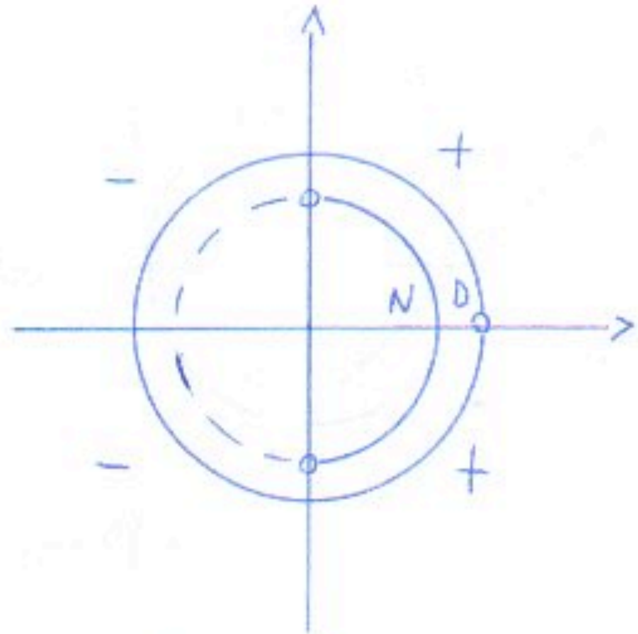
$0 \notin D$

$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{\cos x}{1 - \cos x} = 0 \end{cases}$ $\quad x = \dfrac{\pi}{2} + K\pi$

$A\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ $\quad B\left(\frac{3}{2}\pi; 0\right)$ etc.

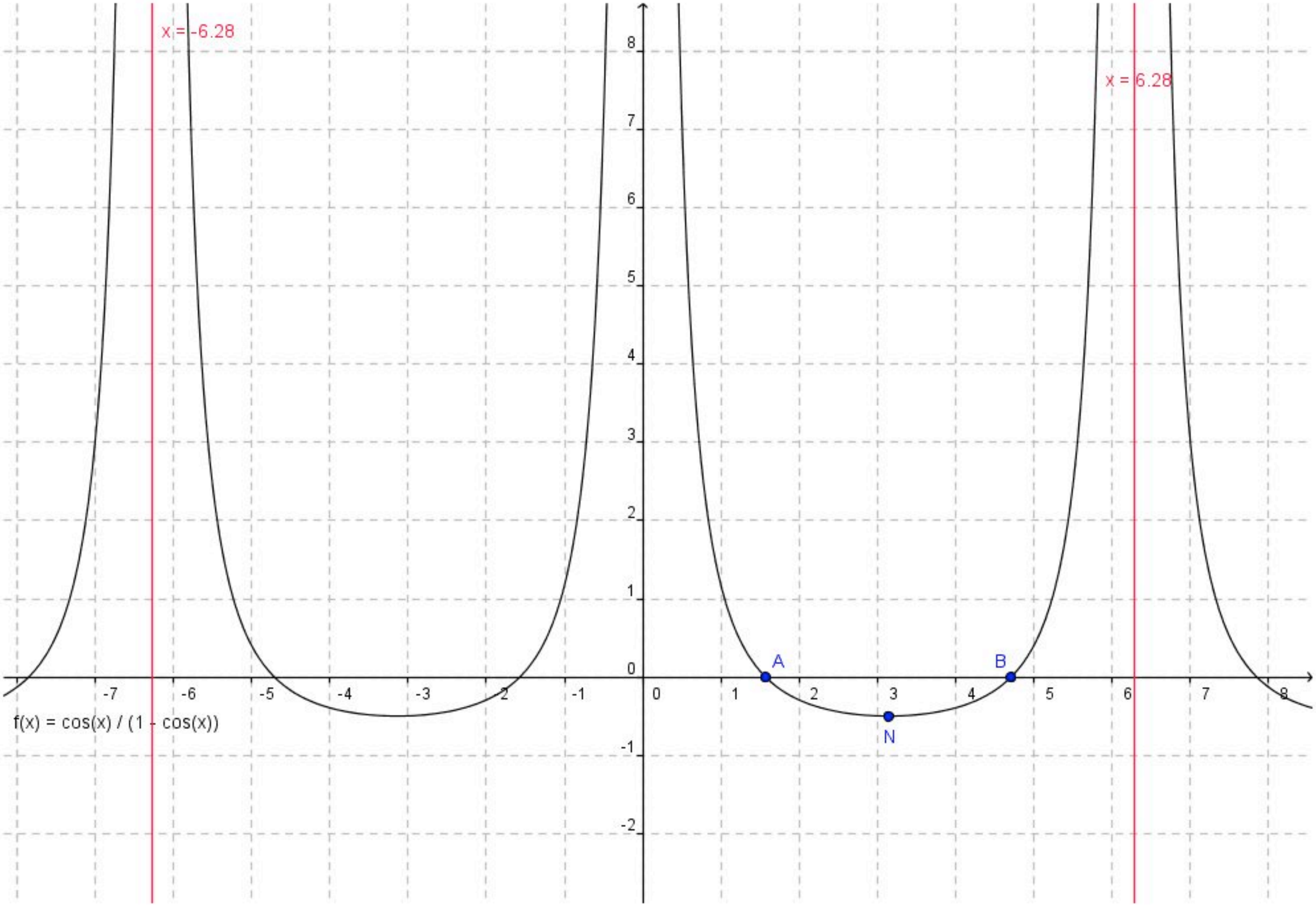
segno:

$f(x) > 0 \qquad \dfrac{\cos x}{1-\cos x} > 0$



$I.P. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2K\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2K\pi \lor \frac{3}{2}\pi + 2K\pi < x < 2\pi + 2K\pi \right\}$

$I.N. = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2K\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2K\pi \right\}$



x = -6.28
x = 6.28
f(x) = cos(x) / (1 - cos(x))
A
B
N

$$y = \arcsin\sqrt{2x - x^2}$$

dominio:

$$\begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ -1 \leq \sqrt{2x-x^2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(2-x) \geq 0 \\ x(2-x) \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$D = [0;2]$$

intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad O(0;0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \arcsin\sqrt{2x-x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2x-x^2} = 0$$

$$x(2-x) = 0 \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

$$A(2;0) \qquad O(0;0)$$

segno:

$$f(x)>0 \rightarrow \arcsin\sqrt{2x-x^2}>0$$

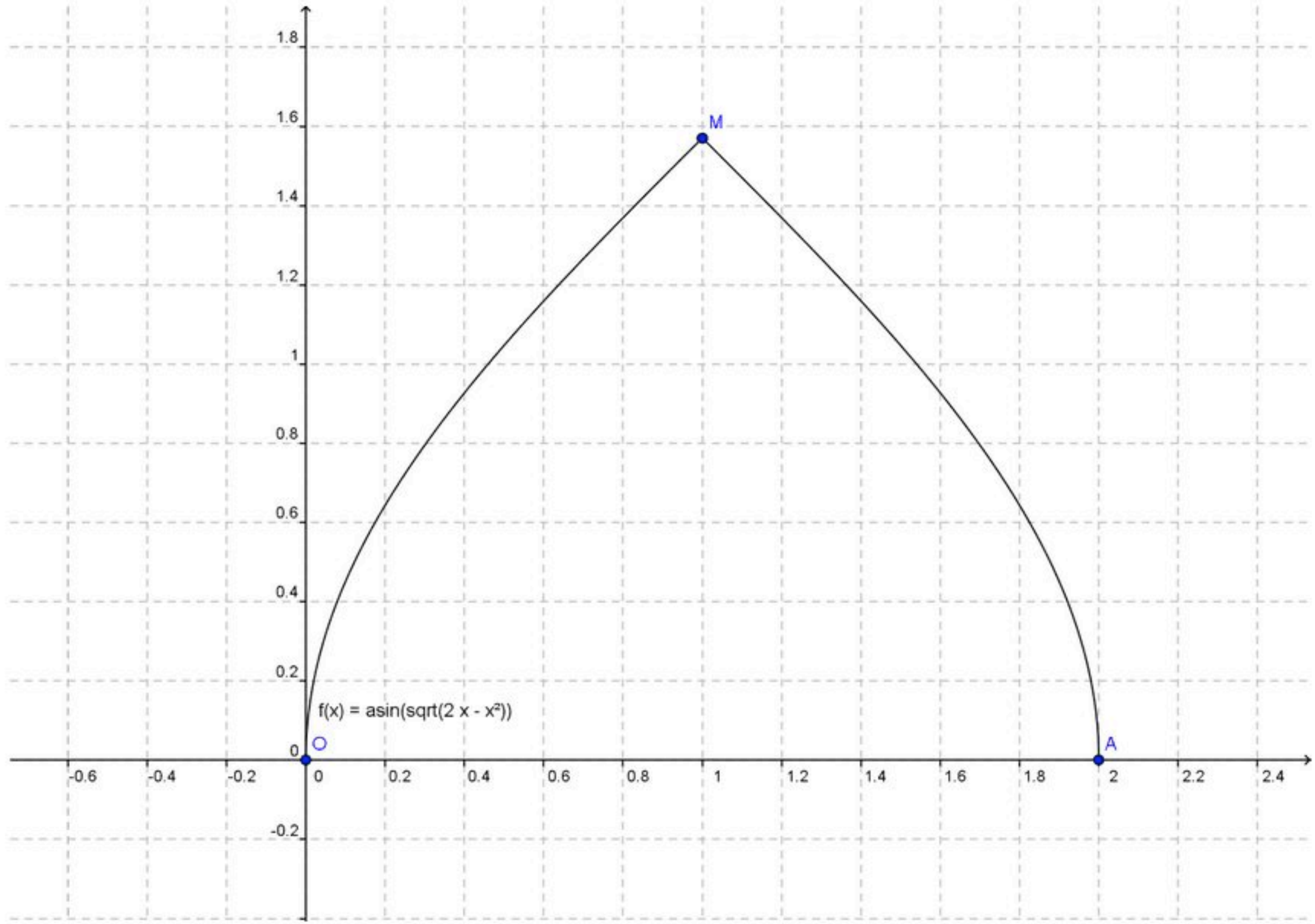
$$0<\sqrt{2x-x^2}\leq 1$$

$$0<2x-x^2\leq 1$$

$$\begin{cases} 2x-x^2>0 \\ x^2-2x+1\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$I.P. = (0;2)$$

$$I.N. = \emptyset$$



M
f(x) = asin(sqrt(2 x - x²))
O
A
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4

$$y = \operatorname{arc}tg\,\frac{1}{1-x}$$

dominio:

$1-x \neq 0 \rightarrow x \neq 1$

$D = \mathbb{R} - \{1\}$

intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ $A\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases} y = 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = 0 \end{cases}$

$\frac{1}{1-x} = 0$ imposs.

Non ci sono intersezioni con l'asse x

segno:

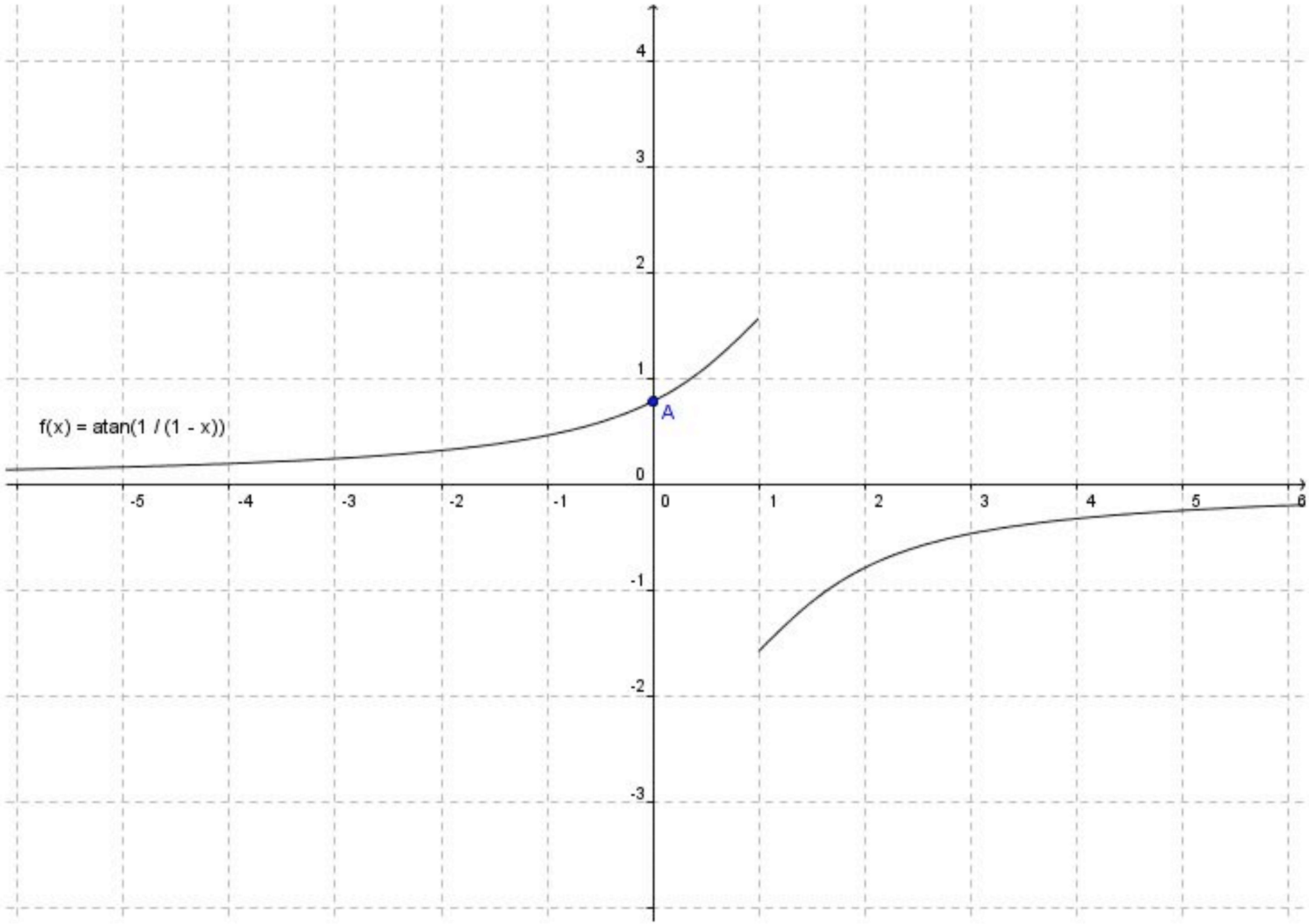
$f(x) > 0$

$\operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} > 0$

$\frac{1}{1-x} > 0 \rightarrow x < 1$

$I.P. = (-\infty; 1)$

$I.N. = (1; +\infty)$



f(x) = atan(1 / (1 - x))
A

Trasformazioni geometriche

1) *Data la trasformazione* T : $\begin{cases} x' = 3x - 2y + 1 \\ y' = 4x + y - 2 \end{cases}$, *dire se rappresenta un'affinità, se ha punti uniti e come si trasforma il quadrato di vertici:* $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(2;2)$, $D(2;1)$.

Si calcola il determinante della matrice della trasformazione. Si ha: $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 8 = 11 \neq 0$. La trasformazione T è allora non degenere e perciò rappresenta un'affinità del piano in sé.

Andiamo adesso ad esaminare se la trasformazione ha punti uniti. Si ha allora: $\begin{cases} x = 3x - 2y + 1 \\ y = 4x + y - 2 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} 2x - 2y + 1 = 0 \\ 4x - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$ che risultano quindi le coordinate del punto unito.

Infine, sostituendo le coordinate dei punti nelle equazioni della T, si trova facilmente che: $A'(2;3)$, $B'(0,4)$, $C'(3;8)$ e $D'(5;7)$.

3) *Data l'affinità* $T : \begin{cases} x' = 2x + y + 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ *, trovare i punti uniti, le rette unite e la trasformata di* $y = 2x$.

La T non è una similitudine, poiché anche se $\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} = k = \sqrt{5}$, $ab + cd = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \neq 0$. Per cercare i punti uniti, si ha: $\begin{cases} x = 2x + y + 1 \\ y = x + 2y + 1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$, per cui, essendo il sistema indeterminato, si hanno infiniti punti uniti, cioè una retta di punti uniti *(retta puntualmente invariante)*, quella di equazione $x + y + 1 = 0$.

4) *Data la trasformazione* T: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y - 4 \end{cases}$, *si individui la natura di* T *e i suoi punti e rette unite (dalla Maturità Scientifica sper. PNI sess. suppl.'92).*

Poiché $ad - bc = 1 \neq 0$ la T è un'affinità,è una similitudine di rapporto $k = 1$ $(ab + cd = 0)$, cioè un'isometria e precisamente (per le equazioni già viste) *una simmetria centrale di centro* $C(0; -2)$. Come sappiamo (vedi tabella) l'unico punto unito è il centro di simmetria e sono unite tutte le rette che per esso passano, cioè il fascio di rette di centro C.

isometria	***Punti uniti***	***Rette unite***
identità	tutti i punti sono uniti	tutte le rette sono unite
simmetria assiale	punti appartenenti all'asse di simmetria	rette perpendicolari all'asse di simmetria
simmetria centrale	centro di simmetria	rette passanti per il centro di simmetria
traslazione	non ha punti uniti (eccetto l'identità)	rette parallele al vettore che la individua
rotazione con centro in O	il centro di rotazione	non ha rette unite

Se non avessimo riconosciuto la natura della trasformazione, per ricercare gli elementi invarianti avremmo posto:

$\begin{cases} x = -x \\ y = -y - 4 \end{cases}$ e quindi il punto unito $C(0; -2)$.

Per cercare invece le rette unite, trovata la $T^{-1} : \begin{cases} x = -x' \\ y = -y' - 4 \end{cases}$,

la retta in forma esplicita $y = mx + q$ si trasforma in $y' = mx' - 4 - q$, da cui $m = m$ e $-4 - q = q$, cioè $q = -2$; le rette unite sono allora: $y = mx - 2$, fascio di rette con centro $C(0; -2)$.

Usando la forma implicita $ax + by + c = 0$, si ha: $ax' + by' + 4b - c = 0$ e dovendo essere proporzionali i coefficienti, essendo in questo caso uguale ad 1 la costante di proporzionalità poiché i coefficienti di x e x' e di y e y' sono uguali, si ha $4b - c = c$, cioè $c = 2b$ (con a e b arbitrari) e infine $ax + by + 2b = 0$ o meglio ancora $ax + b(y + 2) = 0$. I risultati trovati coincidono con quanto già osservato.

Date le seguenti equazioni cartesiane, verificare se esse rappresentano delle trasformazioni geometriche e motivarne la risposta:

$$(1)\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = 4x + 2y - 1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4x + 2y - 3 \end{cases}$$

Ricordiamo che una trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano un punto stesso del piano.

Dunque, per verificare che (1) e (2) siano delle trasformazioni geometriche, dobbiamo riscrivere i sistemi cercando di ricavarci x e y, ovvero, effettuiamo la trasformazione inversa.

Esplicitando x e y dalla (1) otteniamo le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}x' + \frac{1}{8}y' - \frac{1}{8} \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{4}y' + \frac{3}{4} \end{cases}$$

Dunque la (1) definisce una trasformazione geometrica.

Dalla (2) invece, otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = x' - \frac{1}{2}y' - \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{4}y' - \frac{1}{2}y + 3 \end{cases}$$

le quali non definiscono in modo univoco le coordinate x e y, per cui la (2) non è una trasformazione geometrica.

Dati i punti $A(1,2)$, $B(-3,0)$ e $C(-1,-3)$ determina i corrispondenti di A, B e C nella omotetia di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$$

e trova il rapporto tra i perimetri dei due triangoli omotetici. Che cosa si osserva?.

Chiamiamo i punti da trovare A', B' e C' e determiniamo le loro coordinate (x', y') andando a sostituire le coordinate (x, y) di A, B e C nelle equazioni della omotetia:

$$A' \begin{cases} x' = 2 \cdot 1 = 2 \\ y' = 2 \cdot 2 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A'(2,4)$$

$$B' \begin{cases} x' = 2 \cdot (-3) = -6 \\ y' = 2 \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B'(-6,0)$$

$$A' \begin{cases} x' = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y' = 2 \cdot (-3) = -6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C'(-2,-6)$$

Dalla 1° proprietà delle omotetie, il rapporto tra due segmenti omotetici vale $k = 2$; ne segue che anche il rapporto tra i perimetri dei due triangoli omotetici è pari al rapporto di omotetia $k = 2$.

Da queste considerazione emerge che i due triangoli omotetici sono triangoli simili.

Dati i punti $A(1,2)$, $B(-3,0)$ e $C(-1,-3)$ determina le equazioni della dilatazione con centro nell'origine che trasforma i vertici A, B e C nei corrispondenti punti di coordinate $A'\left(\frac{1}{2},-1\right)$, $B'\left(-\frac{3}{2},0\right)$ e $C'\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Ricordiamo che le equazioni della dilatazione sono

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

Per determinare h e k, dobbiamo sostituire le coordinate di A', B' e C' in x' e y', mentre le coordinate di A, B e C in x e y. Facciamolo solo per i punti A' e A e analogamente si farà le altre due coppie di punti:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = h \cdot 1 \\ -1 = k \cdot 2 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{1}{2},\ k = -\frac{1}{2}$$

Dunque la dilatazione è espressa mediante le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

Riconosci che la seguente affinità è un'isometria e classificala:

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{\sqrt{5}}{3}y \\ y' = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + \frac{2}{3}y \end{cases}$$

Si vede subito che le equazioni date esprimono una similitudine diretta con $D > 0$. Infatti le equazioni sono del tipo

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = -b_1x + a_1y + c_2 \end{cases}$$

e

$$D = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = 1$$

.

Inoltre, poichè $D = 1$, si tratta di un isometria. In particolare si ha una simmetria assiale con asse di simmetria passante per l'origine del tipo $y = mx$.

Dalle equazioni della simmetria assiale, possiamo ricavarci il valore di m risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{2}{3} \\ \frac{2m}{1+m^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

Dalla prima equazione risulta $m = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$, mentre dalla seconda viene fuori $m = \frac{\sqrt{5}}{5}$ e $m = \sqrt{5}$. Dunque il valore a comune da considerare è $m = \frac{\sqrt{5}}{5}$. L'asse di simmetria è dunque:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$$

Date le equazioni

$$\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x - y + 1 \end{cases}$$

1. verifica che definiscono un'affinità;
2. stabilisci se si tratta di affinità diretta o inversa;
3. determina i punti A', B' e C' corrispondenti rispettivamente di $A(-1, 2)$, $B(2, 0)$ e $C(1, -2)$ nell'affinità;
4. determina i punti uniti;
5. verifica che l'affinità non è un'isometria

.

Rispondiamo al punto 1: per verificare che le equazioni date definiscono un'affinità, basta calcolare il determinate D della matrice dei coefficienti di x e y che compaiono nelle equazioni, ovvero:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -3 \neq 0$$

Poichè $D \neq 0$ si tratta di un'affinità.

Punto 2: si tratta di un'affinità inversa dato che il determinante è negativo ($D = -3 < 0$).

Punto 3: calcoliamo i corrispondenti punti A', B' e C' sostituendo le coordinate (x,y) dei punti A, B e C nelle equazioni date:

$$A' : \begin{cases} x' = -1 + 2 - 1 = 0 \\ y' = -2 - 2 + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow A'(0, -3)$$

$$B' : \begin{cases} x' = 2 + 0 - 1 = 1 \\ y' = 4 - 0 + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow B'(1, 5)$$

$$C' : \begin{cases} x' = 1 - 2 - 1 = -2 \\ y' = 2 + 2 + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow C'(-2, 5)$$

Punto 4: i punti uniti si determinano sostituendo $(x', y') \to (x, y)$ nelle equazioni date e risolvendo il sistema così ottenuto. Dunque:

$$\begin{cases} x = x + y - 1 \\ y = 2x - y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'unico punto unito è $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Punto 5: Come visto qui, una affinitià è un'isometria se il determinante $D = \pm 1$. Visto che $D = -3 \neq \pm 1$ possiamo concludere dicendo che l'affinità non è una isometria.

Individua il centro di simmetria della curva di equazione $xy - 2x + y + 1$.

Il centro di simmetria $C(x_M, y_M)$, deve soddisfare le equazioni cartesiane di una simmetria centrale:

$$\begin{cases} x' = 2x_M - x \\ y' = 2y_M - y \end{cases}$$

che possono essere riscritte per comodità nel seguente modo:

$$\begin{cases} x = 2x_M - x' \\ y = 2y_M - y' \end{cases}$$

dove (x', y') sono coordinate di punti appartenenti alla curva data.

Sostituendo le espressioni di x e y alla curva data otteniamo:

$$(2x_M - x')(2y_M - y') - 2(2x_M - x') + 2y_M - y' + 1 = 0$$

e sopprimendo gli apici

$$(2x_M - x)(2y_M - y) - 2(2x_M - x) + 2y_M - y + 1 = 0$$

Svolgiamo i calcoli e raggruppiamo i termini con parte letterale xy, x, y e i termini noti:

$$4x_My_M - 2x_My - 2xy_M + xy - 4x_M + 2x + 2y_M - y + 1 = 0$$
$$xy + (-2y_M + 2)x + (-2x_M - 1)y + 4x_My_M - 4x_M + 2y_M + 1 = 0$$

Dovendo la curva originale e quella trasformata coincidere, deve essere:

$$\begin{cases} -2y_M + 2 = -2 \\ -2x_M - 1 = 1 \\ 4x_My_M - 4x_M + 2y_M + 1 = 1 \end{cases}$$

che ha soluzioni $(x_M, y_M) = (-1, 2)$.

Determinare le equazioni della rotazione di centro l'origine e angolo $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$.

Ricordiamo che le equazioni di una rotazione di centro l'origine e angolo α sono:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Dal fatto che $\alpha = \arctan \frac{3}{4}$ segue che $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$.

Troviamo il valore di $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ elevando al quadrato entrambi i membri dell'ultima espressione appena scritta:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{9}{16}$$

Dalla formula fondamentale della trigonometria sappiamo che $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ e andando a sostituire nell'equazione precedente si ha:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{9}{16}$$

Risolviamo l'equazione ottenuta nell'incognita $\sin^2\alpha$:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha = \tfrac{9}{16}(1-\sin^2\alpha)\\
&\sin^2\alpha + \tfrac{9}{16}\sin^2\alpha - \tfrac{9}{16} = 0\\
&\tfrac{25}{16}\sin^2\alpha - \tfrac{9}{16} = 0\\
&25\sin^2\alpha - 9 = 0\\
&\sin\alpha = \tfrac{3}{5}
\end{aligned}$$

Banalmente si ha anche:

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

da cui $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Possiamo concludere scrivendo le equazioni delle trasformazione richiesta:

$$\begin{cases} x' = \tfrac{4}{5}x - \tfrac{3}{5}y \\ y' = \tfrac{3}{5}x + \tfrac{4}{5}y \end{cases}$$

Determinare la trasformata della retta di equazione $6x + y - 1 = 0$ secondo la simmetria rispetto all'origine

SOLUZIONE La simmetria rispetto all'origine ha equazioni $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$; basta quindi applicare le sostituzioni $x \to -x$ e $y \to -y$ all'equazione data, ottenendo la nuova equazione $-6x - y - 1 = 0$, equivalente a

$$6x + y + 1 = 0$$

Determinare la trasformata di $y = \frac{3}{2}x - 1$ secondo la simmetria rispetto all'asse x

Soluzione Applichiamo le equazioni della simmetria rispetto all'asse x[1] basta quindi applicare le sostituzioni $x \to x$ e $y \to -y$ all'equazione data, ottenendo la nuova equazione $-y = \frac{3}{2}x - 1$, equivalente a

$$y = -\frac{3}{2}x + 1$$

Si possono evitare le frazioni moltiplicando per 2 e scrivendo l'equazione in forma implicita:

$$2y + 3x - 2 = 0$$

La retta r subisce una traslazione di vettore $v(1,1)$ e diventa

$$r' :\ y = -3x + 5$$

Qual è l'equazione di r?

Soluzione In questo caso scriviamo le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

ma poiché abbiamo già l'equazione trasformata, non è necessario invertire le equazioni[3], quindi le sostituzioni da fare sono $x \to x + 1$ e $y \to y + 1$, si ottiene così la retta r di partenza:

$$\begin{aligned} y + 1 &= -3(x + 1) + 5 \\ y &= -3x - 3 + 5 - 1 \\ y &= -3x + 1 \end{aligned}$$

Quale delle seguenti curve non cambia in una simmetria rispetto all'asse y?

- $2x - y = 1$
- $y = 2x^2 + 3$
- $y = -x$
- $y^2 + 1 = x$

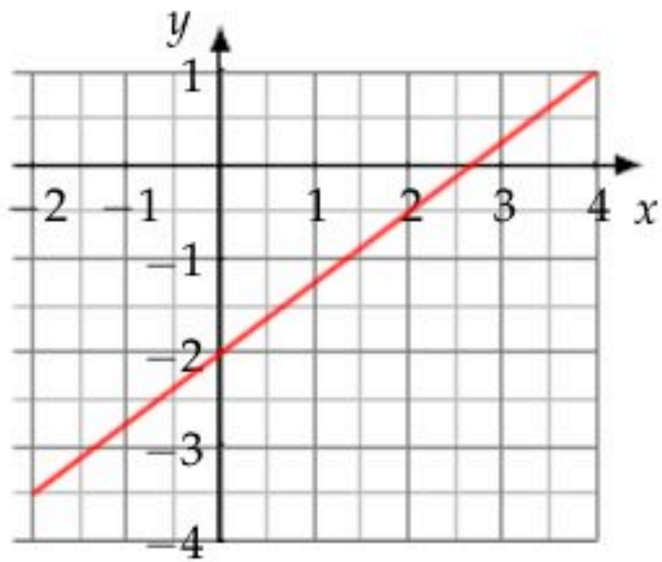
SOLUZIONE Nella simmetria rispetto all'asse x bisogna procedere con le sostituzioni $x \to x$ e $y \to -y$. Applichiamole alle equazioni:

$$\begin{aligned}
2x - y = 1 &\quad\rightarrow\quad -2x - y = -1 \\
y = 2x^2 + 3 &\quad\rightarrow\quad y = 2(-x)^2 + 3 \\
y = -x &\quad\rightarrow\quad y = -(-x) \\
y^2 + 1 = x &\quad\rightarrow\quad y^2 + 1 = -x
\end{aligned}$$

solo la seconda ($y = 2x^2 + 3$) è equivalente alla sua trasformata, quindi questa è la curva che non cambia.

Determina le componenti di un vettore v che, usato per traslare la retta di equazione $y = \frac{3}{4}x - 2$, non ne faccia cambiare l'equazione.

Soluzione Si possono applicare diverse strategie ma la più rapida si basa sul grafico. Possiamo disegnare la retta, poiché conosciamo sia la quota che la pendenza:



Un vettore parallelo alla retta la farà scorrere su se stessa, non facendone cambiare la posizione (e quindi nemmeno l'equazione). La pendenza ci dice come scegliere il vettore: poiché $m = 3/4$, un vettore con componente orizzontale 4 e verticale 3 lascerà la retta al suo posto. Quindi $v(4,3)$

7) *Dire come si trasforma l'equazione della circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$ *nell'omotetia di equazioni:* $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$.

Ricavate le inverse si ha: $x'^2/9 + y'^2/9 = 1$. L'omotetia, particolare similitudine, trasforma infatti circonferenze in circonferenze.

8) *Data la funzione di equazione:* $y = -3x^2 + 4x - 5$, *sia* C *la sua rappresentazione grafica; scrivere l'equazione della funzione il cui grafico* C' *sia il traslato di* C *rispetto alla coppia ordinata* $(-3; 4)$.

Si avranno pertanto le equazioni: $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ e le inverse: $\begin{cases} x = x' + 3 \\ y = y' - 4 \end{cases}$ che sostituite nell'equazione della parabola danno: $y' - 4 = -3(x' + 3)^2 + 4(x' + 3) - 5$, da cui con semplici calcoli, $y' = -3x'^2 - 14x' - 16$ che, essendo fisso il sistema di riferimento, può essere scritta: $y = -3x^2 - 14x - 16$ usando le stesse coordinate.

9) *Dato il quadrato di vertici* $A(2;1)$, $B(2;3)$, $C(4;3)$ *e* $D(4;1)$ *determinare come si trasforma nella traslazione:* $\begin{cases} x' = x - 7 \\ y' = y + 4 \end{cases}$ *e nella rotazione di* $\alpha = -90$, *cioè nella rotazione di equazioni* $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

Facilmente, per la traslazione si ha: $A'(-5,5)$, $B'(-5,7)$, $C'(-3,7)$ e $D'(-3,5)$ e per la rotazione: $A'(1,-2)$, $B'(3,-2)$, $C'(3,-4)$ e $D'(1,-4)$.

Siano date le trasformazioni lineari:

$$T_1 : \begin{cases} x' = x + y - 5 \\ y' = 2x - 3y - 1 \end{cases} \text{ e } T_2 : \begin{cases} x'' = 2x' + y' + 3 \\ y'' = -x' - y' + 3 \end{cases}$$

si trovi la trasformazione T ottenuta applicando in successione la T_1 e la T_2, cioè si trovi $T = T_2 \circ T_1$.

Si avrà: $P(x, y) \xrightarrow{T_1} P'(x', y') \xrightarrow{T_2} P''(x'', y'')$ e quindi:

$P(x, y) \xrightarrow{T_1} P'(x' = x + y - 5, y' = 2x - 3y - 1) \xrightarrow{T_2} P''(x'' = 2x' + y' + 3, y'' = -x' - y' + 3)$ ed infine:

$$T : \begin{cases} x'' = 2\,(x + y - 5) + (2x - 3y - 1) + 3 = 4x - y - 8 \\ y'' = -\,(x + y - 5) - (2x - 3y - 1) + 3 = -3x + 2y + 9 \end{cases} \text{ cioè}$$

$$T : \begin{cases} x'' = 4x - y - 8 \\ y'' = -3x + 2y + 9 \end{cases} .$$

Scrivere le equazioni della simmetria assiale che ha come asse la retta di equazione $y = 2x - 3$.

Dal sistema sopra riportato otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{y+y'}{2} = 2\left(\dfrac{x+x'}{2}\right) - 3 \\ -\dfrac{1}{2} = \dfrac{y'-y}{x'-x} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y + y' = 2x + 2x' - 6 \\ 2y' - 2y = -x' + x \end{cases} \Longrightarrow$$

$\begin{cases} 2x' - y' = -2x + y + 6 \\ x' + 2y' = x + 2y \end{cases}$ che risolto rispetto a x' e y' ci permette di trovare le equazioni della simmetria di asse r:

$$T : \begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + \dfrac{12}{5} \\ y' = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - \dfrac{6}{5} \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che, detta A la matrice della trasformazione, $\det A = -1$ (la simmetria assiale è infatti isometria indiretta) e che la T è **involutiva**, cioè coincide con la sua inversa.